Contrôle continu 1
Correction

DAUGUET Simon

24 février 2012

Théorème 0.1 :
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u = (1, 0, 0)$, $v = (1, 1, 0)$ et $w = (1, 0, 1)$. On note aussi $F = \text{Vect}(u, v)$ et $G = \text{Vect}(v, w)$. Montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$.

Démonstration. Par définition, on sait que F et G sont des espaces vectoriels. D'autres parts, comme $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, les espaces engendrés sont donc des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Par définition, on sait donc que $F + G \subset \mathbb{R}^3$. Il suffit donc démontrer l'inclusion inverse.

Soit donc $a \in \mathbb{R}^3$. Il s'écrit donc $a = (x, y, z)$ avec $x, y, z \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
a &= (x, y, z) \\
&= x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) \\
&= x(1, 0, 0) + y\big((1, 1, 0) - (1, 0, 0)\big) + z\big((1, 0, 1) - (1, 0, 0)\big) \\
&= (x - y - z)(1, 0, 0) + y(1, 1, 0) + z(1, 0, 1) \\
&= (x - y - z)u + yv + zw \; .
\end{aligned}$$

Et comme $(x - y - z)u + yv \in F$ et $zw \in G$, on vient de trouver une décomposition de a en un vecteur de F et un vecteur de G. Donc $\mathbb{R}^3 \subset F + G$ et on a l'égalité demandée. $\square$

Théorème 0.2 :
Donner un exemple de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{R})$ ne soit pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Démonstration. On va donner 2 exemples.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$. On a $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$. Et $\mathbb{R}_+$ n'est pas un groupe, car l'opposé de 1 est $-1 \notin \mathbb{R}_+$. Donc $f(\mathbb{R})$ n'est peut pas être un espace vectoriel. (On aurais aussi pu dire que si $f(\mathbb{R})$ était un ev, alors $(-1) \times f(1) = -1 \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$ ce qui est absurde).

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonctions constante égale à $a \neq 0$. Donc $g(\mathbb{R}) = \{a\}$ qui n'est pas un espace vectoriel puisque $0 \times a \notin g(\mathbb{R})$. □

Théorème 0.3 :
Soit E le $\mathbb{R}$-ev des polynômes de degré au plus 2 à coefficients réels. Montrer que $F = \{aX^2 + b | a, b \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{cX, c \in \mathbb{R}\}$ dont supplémentaires dans E.

Démonstration. On a $E = \mathbb{R}_2[X] = \{aX^2 + bX + c | a, b, c \in \mathbb{R}\}$ est un $\mathbb{R}$-ev (déjà fait en TD). F et G sont des sous-espaces vectoriels de E car $F = \Im(f)$ et $G = \Im(g)$ où $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $f(a, b) = aX^2 + b$ et $g(c) = cX$. Les applications f et g sont linéaires car la multiplication est linéaire est linéaire (donc g l'est) et l'addtion l'est aussi (donc f, qui est l'addition de la multiplication par X^2 et de l'identité, est linéaire aussi car l'ensemble des applications linéaires entre 2 $\mathbb{R}$-ev est un 'R-ev).

Il faut donc montrer que $F + G = E$ et $F \cap G = \{0\}$.

Soit $P \in E$. Alors P s'ecrit $P(X) = aX^2 + bX + c = (aX^2 + c) + (bX)$ et $aX^2 + c \in F$, $bX \in G$. Donc $P \in F + G$ et donc $E \subset F + G \subset E$.

Soit $P \in F \cap G$. Donc $P(X) = aX^2 + b$ car $P \in F$ et $P(X) = cX$ car $P \in G$. Alors $Q(X) = aX^2 + b - cX$ est le polynôme nul ($Q = P - P$). En particulier, $Q(0) = 0 = b$. Donc $Q(X) = X(aX - c) = 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = x(ax - c) = 0$. En particulier, on a $\forall x \neq 0,\ ax - c = 0$, *i.e.* $ax = c$, $\forall x \neq 0$. L'évalutation en 0 puis en 1 nous donne alors que $c = 0$ et finalement $a = 0$. Donc $P = 0$ et donc $F \cap G = \{0\}$.

Par conséquent, F et G sont bien des sous-ev supplémentaires de E. □

Théorème 0.4 :
Est-il vrai que les sous-espace vectoriel $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$ admet un unique supplémentaire dans $\mathbb{R}^2$?

Démonstration. Commençons par une remarque. L'énoncé n'est pas parfaitement correct. En effet, il y a un problème de type : $\mathbb{R}$ est un ensemble de nombres, alors que $\mathbb{R}^2$ est un ensemble de couples de nombres. Donc, à strictement parlé, $\mathbb{R}$ ne peut être contenu dans $\mathbb{R}^2$ (un nombre n'est pas un couple). Néanmoins, on peut plonger $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$, c'est à dire qu'on peut décrire $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ comme l'image d'une application injective. Comme on manipule des ev, on impose en plus au plongement d'être une application linéaire. Il reste cependant une infinité de façons de planger $\mathbb{R}$ linéairement dans $\mathbb{R}^2$: on peut par exemple l'identifier à $\{0\} \times \mathbb{R}$ ou bien à $\{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$. Néanmoins, par convention, si l'onconsidère le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^n$, on verra $\mathbb{R}^p$, pour $p \leq n$, comme un sous-ev de $\mathbb{R}^n$ en ne considérant que les p premières coordonées, *i.e.* on identifiera $\mathbb{R}^p$ à $\mathbb{R}^p \times \{0\}^{n-p}$ plongé dans $\mathbb{R}^n$. Ici donc, il fallait comprendre $\mathbb{R}$ comme étant le sous-ev $\mathbb{R} \times \{0\}$ de $\mathbb{R}^2$. Dans l'éventulité où l'on aurait besoin d'identifier $\mathbb{R}$ comme plongé dans $\mathbb{R}^2$ d'une autres façons (par $x \mapsto (x, x)$ par exemple), le plongement en question (et donc l'identification à faire) sera toujours précisée. En l'absence de précision du plongement utilisé, c'est la convention qui s'applique et donc $\mathbb{R}$ est identifié simplement à la première coordonnées, les autres étant complétées par des 0.

Cette convention à été prise pour alléger les notations. En effet, dans les démonstrations, pouvoir voir un $\mathbb{R}^p$ comme contenu dans un $\mathbb{R}^n$ est souvent très utile. En général, le choix du plongement est libre. Et celui de la convention est le plus naturel, donc celui qui intervient le plus souvent. De ce fait, pour alléger les notations, on omet souvent de préciser que les coordonées restantes sont à remplir par des 0. Dans le même soucis d'alléger les notations, on utilisera ici d'avantages $\mathbb{R}$ que $\mathbb{R} \times \{0\}$ sauf dans les cas chaoquants ou pour ne pas déranger la lecture.

On va montrer dans un premier temps que $\mathbb{R}$ (à comprendre comme $\mathbb{R} \times \{0\}$ en vertu de la remarque précédente, ce qui revient à l'axe des abscisses) à deux supplémentaires (au moins) dans $\mathbb{R}^2$ et on finira par montrer qu'il en a même une infinité.

On considère $F = \text{Vect}((0,1)) = \{0\} \times \mathbb{R}$ et $G = \text{Vect}((1,1)) = \{(x,x), x \in \mathbb{R}\}$. Par défintion, F et G dont des sous-ev de $\mathbb{R}^2$. Soit $a \in F \cap \mathbb{R}$ et $b \in G \cap \mathbb{R}$. On écrit $a = (\alpha, \beta)$ et $b = (\gamma, \delta)$. Comme $a, b \in \mathbb{R}$, leur deuxième coordonée est nulle, donc $\beta = 0 = \delta$. Donc $a = (\alpha, 0)$ et $b = (\gamma, 0)$. Mais $a \in F$ nous donne que sa première coordonées doit être 0 et donc $a = 0$. D'autre part, $b \in G$ nous dit que ses deux coordonées doivent être égales, donc $b = 0$. Et donc $F \cap \mathbb{R} = G \cap \mathbb{R} = \{0\}$.

Soit maintenant $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors $(x,y) = (x,0) + (0,y)$ et $(x,0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$ et $(0,y) \in F$. Donc $F + \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. De même, $(x,y) = (x-y,0) + (y,y)$ avec $(x-y,0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$ et $(y,y) \in G$. (On rapelle que $\mathbb{R} \times \{0\}$ correspond à $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$). Et donc $\mathbb{R}^2 = G + \mathbb{R}$. D'où $F + \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = G + \mathbb{R}$.

Mais $F \neq G$ car $(0,1) \in F$ mais $(0,1) \notin G$ car $1 \neq 0$. Donc $\mathbb{R}$ admet bien deux supplémentaires distincts dans $\mathbb{R}^2$.

En fait, toutes les droites $\text{Vect}((a,b)) = \{(ax,bx), x \in \mathbb{R}\}$ avec $b \neq 0$ sont des supplémentaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$. En effet, ce sont bien des espaces vectoriels, si $(x,y) \in \mathbb{R} \cap E_{a,b}$ où $E_{a,b} = \text{Vect}((a,b))$, alors $y = 0$ et donc l'aquation imposé par la deuxième coordonée donne forcément que $x = 0$. D'autres parts, si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on peut écrire $(x,y) = \left(x - a\frac{y}{b}, 0\right) + \left(a\frac{y}{b}, b\frac{y}{b}\right)$ ce qui montre que $\mathbb{R} \oplus E_{a,b} = \mathbb{R}^2$.

Ce résultat est généralisable. Ce n'est PAS valable uniquement dans le cas $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^2$. En général, un sous-ev F d'un ev E admet plusieurs (une infinité) de supplémentaire. □

Théorème 0.5 :
Soient E et F deux $\mathbb{R}$-ev. Montrer qu'une application linéaire $f : E \to F$ est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0\}$.

Démonstration. Cf démonstration du cours. □

Théorème 0.6 :
Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $g(x, y) = (x + 2y, -y, x + y)$. Montrer que g est linéaire et déterminer $\ker(g)$.

Démonstration. Soit $x, y, s, t, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
g\big(\lambda(x,y) + \mu(s,t)\big) &= g\big((\lambda x + \mu s, \lambda y + \mu t)\big) \\
&= \big((\lambda x + \mu s) + 2(\lambda y + \mu t), -(\lambda y + \mu t), (\lambda x + \mu s) + (\lambda y + \mu t)\big) \\
&= \big(\lambda(x + 2y) + \mu(s + 2t), -\lambda y - \mu t, \lambda(x + y) + \mu(s + t)\big) \\
&= \big(\lambda(x + 2y), -\lambda y, \lambda(x + y)\big) + \big(\mu(s + 2t), -\mu t, \mu(s + t)\big) \\
&= \lambda(x + 2y, -y, x + y) + \mu(s + 2t, -t, s + t) \\
&= \lambda g(x, y) + \mu g(s, t)
\end{aligned}$$

Donc g est bien linéaire. (On pouvait le justifier aussi en disant que $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont linéaire de manière évidente et chacune des applications coordonées de g sont des sommes des combinaisons linéaires de ces deux applications et donc sont elles-même linéaires, ce qui rend g linéaire).

Soit $(x, y) \in \ker(g)$. Donc $g(x, y) = 0$. Mais la deuxième coordonée de $g(x, y)$ nous dit alors que $y = 0$. Ainsi, $g(x, y) = g(x, 0) = (x, 0, x) = (0, 0, 0)$, donc $x = 0$ est donc $\ker(g) = \{0\}$. □

Théorème 0.7 :
Soit E le $\mathbb{R}$-ev des polynômes de degré ≤ 2 à coefficients réels. Soit $f : E \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(P) = (P(0), P'(0))$ où P' est le polynôme dérivé de P (en tant que fonction). Montrer que f est linéaire et déterminer un polynôme Q tel que $\ker(f) = \mathrm{Vect}(Q)$.

Démonstration. $E = \mathbb{R}_2[X] = \{aX^2 + bX + x | a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

Les applications d'évalutaion en 0 et de dérivation sont linéaires, donc les applications coordonnées de f sont linéaires et donc f l'est également.

Soit $P \in \ker(f)$. Donc $P(0) = 0$, donc P n'a pas de terme constant. Donc $P(X) = aX^2 + bX = X(aX + b)$. Ainsi, $P'(X) = 2aX + b$ et donc $P'(0) = 0$ nous donne que $b = 0$. Donc $P(X) = aX^2$. On pose alors $Q(X) = X^2$. Donc $P \in \ker(f) \implies P \in \mathrm{Vect}(Q)$, *i.e.* $\ker(f) \subset \mathrm{Vect}(Q)$.

Réciproquement, il faut montrer l'inlcusion inverse. Mais pour cela, comme ce sont des espaces vectoriels, il suffit de montrer que $Q \in \ker(f)$. Mais $f(Q) = (0^2, 2 \times 0) = 0$ donc $Q \in \ker(f)$ et donc $\mathrm{Vect}(Q) \subset \ker(f)$.

D'où $\ker(f) = \mathrm{Vect}(X^2)$. □