Correction du partiel

Le 12/03/2012 de 14h à 16h

Exercice 1

1. L'application f n'est pas linéaire car, par exemple, $f(2,0) = 8 \neq 2 \times f(1,0) = 2$.
2. Un élément (x, y) de $f^{-1}(]0,1[)$ est un élément vérifiant $0 < (x + 2y)^3 < 1$. Cette double inégalité équivaut à $0 < x + 2y < 1$ puisque la fonction cube se restreint en une bijection de $]0,1[$. Cette double inégalité équivaut encore à $-x/2 < y < 1 - x/2$. Ainsi

$$f^{-1}(]0,1[) = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -x/2 < y < 1 - x/2\right\} .$$

3. L'application f n'est pas injective car, par exemple, $f(0,1) = f(2,0) = 8$.

Exercice 2

1.(a) Soient $u_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1)$ et $u_2 = (x_2, y_2, z_2, t_2)$ deux vecteurs de F et λ, μ deux réels. Par définition de F, on a $z_1 = z_2 = 0$. Donc $\lambda z_1 + \mu z_2 = 0$. Donc

$$\lambda u_1 + \mu u_2 = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2, \lambda t_1 + \mu t_2)$$

est bien un vecteur de F, i.e. F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.
1.(b) Les vecteurs $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_4 = (0,0,0,1)$ forment une famille libre de F (puisque ce sont des vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^4$). Montrons qu'ils forment une partie génératrice (et par conséquent une base) de F : soit $u = (x, y, z, t) \in F$. Par définition $z = 0$, donc $u = x \cdot e_1 + y \cdot e_2 + t \cdot e_4$.
2.(a) Le complémentaire de G dans $\mathbf{R}^4$ est

$$G = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 : z \neq 0\right\} .$$

2.(b) Cet ensemble G n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ car, par exemple, $(0,0,0,0) \notin G$.
3.(a) Voir le cours.
3.(b) L'inclusion $F + H \subseteq \mathbf{R}^4$ est évidente. Réciproquement soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$. Alors $u = (x, y, 0, t + z) + (0, 0, z, -z)$. On a bien $(x, y, 0, t + z) \in F$ et $(0, 0, z, -z) \in H$. Donc $u \in F + H$.
4. La droite $\mathrm{Vect}(e_3)$, où $e_3 = (0,0,1,0)$, est un supplémentaire de F dans $\mathbf{R}^4$. En effet, d'après 1.(b), on a $\mathbf{R}^4 = F + \mathrm{Vect}(e_3)$ puisque (e_1, e_2, e_3, e_4) est la base canonique (et en particulier c'est une famille génératrice) de $\mathbf{R}^4$. On a aussi $F \cap \mathrm{Vect}(e_3) = \{0\}$. En effet, d'après 1.(b) un vecteur $u \in F \cap \mathrm{Vect}(e_3)$ s'écrit $\lambda_3 \cdot e_3$, d'une part et $\lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2 + \lambda_4 \cdot e_4$ d'autre part. Ainsi

$$-\lambda_3 \cdot e_3 + \lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2 + \lambda_4 \cdot e_4 = 0 .$$

Comme la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est libre, on déduit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Donc $u = 0$. Finalement $\mathbf{R}^4 = F \bigoplus \mathrm{Vect}(e_3)$.
(Rédaction plus succinte : tout vecteur de $\mathbf{R}^4$ s'écrit d'une unique manière $\sum_{i=1}^4 \lambda_i e_i$ donc d'une unique manière $(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_4 e_4) + (\lambda_3 e_3)$ donc d'une unique manière comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur colinéaire à e_3.)

Exercice 3

1. Soient λ, μ deux réels et $u = (x, y, z)$, $v = (x', y', z')$ deux vecteurs de $\mathbf{R}^3$. On a

$$f(\lambda u+\mu v) = (\lambda x+\mu x', -3\lambda y+4\lambda z-3\mu x'+4\mu z', -2\lambda y+3\lambda z-2\mu y'+3\mu z') = \lambda f(u)+\mu f(v)\,.$$

2. On calcule $f(e_1) = (1, 0, 0)$, $f(e_2) = (0, -3, -2)$, $f(e_3) = (0, 4, 3)$. Si $\lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \lambda_3 f(e_3) = 0$, alors on obtient le système

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ -3\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Multipliant par 2 la seconde équation et faisant la différence avec la troisième équation multipliée par 3, on obtient $\lambda_3 = 0$. On déduit ensuite $\lambda_2 = 0$ de l'une ou l'autre des deux dernières équations. Donc $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est libre.
4. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. On a

$$f\circ f(u) = f(x, -3y+4z, -2y+3z) = (x, -3(-3y+4z)+4(-2y+3z), -2(-3y+4z)+3(-2y+3z)) = u\,.$$

Ainsi $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}$. Par conséquent f est inversible et $f^{-1} = f$.
4. L'image d'une base par un isomorphisme est une base donc $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est une base de $\mathbf{R}^3$ car c'est l'image de la base canonique de $\mathbf{R}^3$ par l'isomorphisme f.

Exercice 4

1. Si P, Q sont deux polynômes à coefficients réels et si λ, μ sont deux réels, alors $\lambda P + \mu Q$ est encore un polynôme à coefficients réels. Donc $\mathbf{R}[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.
2.(a) Le noyau de f est l'ensemble des polynômes à coefficients réels dont la dérivée seconde est nulle. Il s'agit donc de l'ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré au plus 1.
2.(b) L'application f est surjective : en effet soit $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbf{R}[X]$. Alors $P = f(Q)$ où $Q = a_0/2X^2 + a_1/6X^3 + \cdots + a_n/(n+1)(n+2)X^{n+2}$. En revanche f n'est pas un isomorphisme car f n'est pas injective d'après (a).
2.(c) L'image de g est $\{X \cdot P : P \in \mathbf{R}[X]\}$. Montrons que c'est l'ensemble des polynômes P à coefficients réels vérifiant $P(0) = 0$. Déjà si $P \in \mathrm{Im}g$ alors $P(0) = 0$ car $P = X \cdot Q$ pour un certain polynôme Q. Réciproquement soit P un polynôme tel que $P(0) = 0$ alors P est de la forme $P = a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$. Donc $P = g(Q)$ où $Q = a_1 + a_2X + \cdots + a_nX^{n-1}$.
2.(d) L'application linéaire g est injective : si P est dans le noyau de g alors $X \cdot P = 0$ i.e. tous les coefficients du polynôme $X \cdot P$ sont nuls. Ces coefficients sont les mêmes que ceux de P. Donc tous les coefficients de P sont nuls i.e. $P = 0$. En revanche g n'est pas un isomorphisme car g n'est pas surjective d'après la question (c).