DM 1

Exercice 1

Soit f la fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$f(x,y) = (x-y)^2 .$$

1. L'application f est-elle linéaire ?
2. Déterminer l'image réciproque de $\{0\}$ par f.
3. Déterminer l'image directede $\mathbf{R}^2$ par f.

Exercice 2

Soient $a \in \mathbf{R}$ et $E_a = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x - 2y - z = a\}$.

1. Pour quelles valeurs de a l'ensemble E_a est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$?
2. Donner une famille génératrice de E_0.
3. Soient $e_1 = (2,1,0)$, $e_2 = (1,0,1)$, et $e_3 = (0,1,-2)$. Montrer que e_1, e_2 et e_3 sont des vecteurs de E_0.
4. La famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est-elle libre ?
5. La famille $\{e_1, e_2\}$ forme-t-elle une base de E_0 ?
6. Soit f l'application de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

   $$f(x,y,z) = x - 2y - z .$$

   Montrer que f est une application linéaire.
7. Montrer que $\ker f$ est un plan dont on déterminera une base.
8. Montrer que $\mathrm{Im} f = \mathbf{R}$.

Exercice 3

Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^4$ on considère les vecteurs :

$$e_1 = (1,2,0,-1),\ e_2 = (1,0,1,0),\ f_1 = (0,-2,1,-1),\ f_2 = (1,-2,2,1) .$$

One note $E_1 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et $F_1 = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$.

1. La famille $\{e_1, e_2, f_1\}$ est-elle libre ?
2. L'espace vectoriel $\mathbf{R}^4$ est-il somme directe de E_1 et F_1 ?
3. A-t-on $E_1 \subseteq F_1$? $F_1 \subseteq E_1$?
4. Déterminer un supplémentaire de E_1 dans $\mathbf{R}^4$.