TD1: Ensembles, applications

Exercice 1

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction. Exprimer à l'aide d'une proposition logique quantifiée le fait que :

1. f est croissante.
2. f est strictement croissante.
3. f n'est pas croissante.
4. f n'est pas strictement croissante.

Exercice 2

Soient X et Y deux ensembles. Montrer l'équivalence :

$$X = Y \iff X \cup Y = X \cap Y\,.$$

Exercice 3

Donner la liste des éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{2, 3\}))$.

Exercice 4

Soient A et B deux ensembles. Comparer $\mathcal{P}(A \cup B)$ et $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Faire de même en remplaçant la réunion par l'intersection.

Exercice 5

Soient A, B, C trois ensembles satisfaisant

$$A \cap C = B \cap C\,, \qquad A \cup C = B \cup C\,.$$

Montrer que $A = B$.

Exercice 6

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Déterminer l'ensemble des parties X de E telles que $A \cup X = B$.

Exercice 7

Soit f l'application $\cos : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Déterminer :

$$f(\mathbf{R})\,, \qquad f^{-1}(\mathbf{R})\,, \qquad f([0, \pi/2[)\,, \qquad f^{-1}(\{1\})\,,$$
$$f^{-1}(]-1, 2])\,, \qquad f^{-1}(f([0, \pi]))\,, \qquad f^{-1}(f([0, \pi/2]))\,.$$

Exercice 8

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. One note A, A' (resp. B, B') deux sous-ensembles de E (resp. F).

1. Montrer que

$$f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')\,, \qquad f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A')\,,$$
$$f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')\,, \qquad f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')\,.$$

2. Montrer que la seconde relation n'est pas toujours une égalité.
3. Montrer que f est injective si et seulement si la seconde relation est une égalité pour tout couple de sous-ensembles (A, A') de E.

Exercice 9

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. One note A un sous-ensemble de E et B un sous-ensemble de F.

1. Montrer que $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ et $B \subseteq f\left(f^{-1}(B)\right)$.
2. Montrer que les inclusions de la question précédente ne sont pas toujours des égalités.
3. Montrer que :
   (a) si f est injective alors $A = f^{-1}(f(A))$,
   (b) si f est surjective alors $B = f\left(f^{-1}(B)\right)$.

Exercice 10

Soient a, b, c, d quatre nombres réels. On suppose $c \neq 0$. On note $E = \mathbf{R} \setminus \{-d/c\}$.

1. Pour quels réels x l'application
$$f : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$
est-elle définie ?
2. Montrer que f est injective si et seulement si $ad - bc \neq 0$.
3. Déterminer l'image F de f, et justifier que la fonction
$$\begin{aligned} \tilde{f} : E &\to F \\ x &\mapsto f(x)\,, \end{aligned}$$
admet une réciproque.
4. Donner une expression pour l'inverse de $\tilde{f}$.

Exercice 11

Soient $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ deux applications. On considère l'application
$$\begin{aligned} h : \mathbf{R} &\to \mathbf{R}^2 \\ x &\mapsto (f(x), g(x)) \,. \end{aligned}$$

1. Montrer que h est injective dès que f ou g l'est.
2. Montrer que h peut être injective sans que ni f ni g ne le soit.
3. Montrer que si h est surjective alors f et g le sont également.
4. Donnr un exemple où f et g sont surjectives sans que h ne le soit.

Exercice 12

On considère l'application
$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} &\to \mathbf{R} \times \mathbf{R} \\ (x, y) &\mapsto (e^y, x^2)\,. \end{aligned}$$

1. Quelles sont les images directes par f de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_-$, $\{-1, 1\} \times [-1, 1]$?
2. Donner les images réciproques par f de $\mathbf{R}_- \times \mathbf{R}$, $\{1\} \times [-1, 1]$, $\{1\} \times \{1\}$.

Exercice 13

Pour quels réels a l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^2 &\to \mathbf{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto (x+2y, 3x+ay)\,, \end{aligned}$$

est-elle injective ? surjective ?

Exercice 14

Montrer que l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^2 &\to \mathbf{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto (x+y, 2x-y)\,, \end{aligned}$$

est bijective. Déterminer les images **directe** et **réciproque** par f du cercle unité :

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}\,.$$

Exercice 15

Soient E, F, G trois ensembles et f, g deux applications :

$$f : E \to F\,, \qquad g : F \to G\,.$$

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f l'est aussi. Donner un exemple dans lequel $g \circ f$ est injective sans que g ne le soit.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g l'est aussi. Donner un exemple dans lequel $g \circ f$ est surjective sans que f ne le soit.
3. Que dire sur f et g si $g \circ f$ est bijective ?
4. Montrer que si deux des trois applications $f, g, g \circ f$ sont bijectives alors la troisième l'est aussi.

Exercice 16

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On considère l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(E) &\to \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \\ X &\mapsto (X \cap A, X \cap B)\,. \end{aligned}$$

1. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante analogue à la précédente pour que f soit surjective.

TD2: Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

Exercice 1

Les sous-ensembles suivants de $\mathbf{R}^2$ sont-ils des sous-$\mathbf{R}$-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$? Justifier.

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x = 0\}, \qquad B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = 0\}, \qquad C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x = 1\},$$
$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x = y\}, \qquad E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = x^2\}, \qquad F = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 2012x + 10^9 y = 0\},$$
$$G = \{(8x - y, 2y + \pi x) : (x, y) \in \mathbf{R}^2\}, \qquad H = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geqslant y\}.$$

Exercice 2

On considère les trois sous-ensembles de $\mathbf{R}^3$ suivants :

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 2x+4y+5z = 0\}, \ F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 3x+7y+11z = 0\}, G = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x+6z = 0\}.$$

Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbf{R}^3$, lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

$$F, G, H, F \cap G, F \cap G \cap H, F \cup G, F \cup H, F \cup (G \cap H).$$

Exercice 3

On considère les ensembles suivants :

$$E = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbf{C}^3 : z_1 + z_2 = 0, \ iz_1 + \sqrt{2} z_3 = 0\},$$
$$F = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbf{R}^3 : z_1 + z_2 = 0, \ iz_1 + \sqrt{2} z_3 = 0\},$$
$$G = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbf{Z}^3 : z_1 + z_2 = 0, \ iz_1 + \sqrt{2} z_3 = 0\}.$$

1. Quelle relation existe-t'il entre E et F ?
2. Parmi les ensembles E, F, lesquels sont des $\mathbf{C}$-espaces vectoriels ? $\mathbf{R}$-espaces vectoriels ?
3. Combien y a-t'il de couples d'entiers relatifs (n, m) vérifiant $ni = m\sqrt{2}$? En déduire ce que vaut l'ensemble G.

Exercice 4

Soit $\mathcal{E}$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions continues d'une variable réelle et à valeurs réelles. Les ensembles

$$\mathcal{A} = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : f \text{ est dérivable}\},$$
$$\mathcal{B} = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : f \text{ est paire}\},$$

sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{E}$?

Exercice 5

Montrer que l'ensemble de suites réelles :

$$\mathcal{U} = \{(u_n)_{n \in \mathbf{N}} : \exists (a, b) \in \mathbf{R}^2, \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n\}$$

est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

Exercice 6

Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Le complémentaire de F dans E est-il un sous-espace vectoriel ?

Exercice 7

Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Montrer que $F_1 \cup F_2$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F_1 \subseteq F_2$ ou $F_2 \subseteq F_1$.

Exercice 8

Dans $E = \mathbf{R}^3$, on considère les vecteurs $u_1 = (1,1,3)$, $u_2 = (1,-1,-1)$, $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (2,-1,0)$. Montrer que $\mathrm{Vect}(u_1,u_2) = \mathrm{Vect}(v_1,v_2)$.

Exercice 9

Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs $e_1 = (1,2,3,4)$ et $e_2 = (1,-2,3,-4)$. Peut-on déterminer x et y tels que $(x,1,y,1) \in \mathrm{Vect}(e_1,e_2)$? Et tels que que $(x,1,1,y) \in \mathrm{Vect}(e_1,e_2)$?

Exercice 10

Dans $\mathbf{R}^4$ on considère les vecteurs :

$$e_1 = (0,1,-2,1)\,, \qquad e_2 = (1,0,2,-1)\,, \qquad e_3 = (3,2,2,-1)\,,$$
$$e_4 = (0,0,1,0)\,, \qquad e_5 = (0,0,0,1)\,.$$

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. $\mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_3) = \mathrm{Vect}\left((1,1,0,0),(-1,1,-4,2)\right)$.
2. $(1,1,0,0) \in \mathrm{Vect}(e_1,e_2) \cap \mathrm{Vect}(e_2,e_3,e_4)$.
3. $\mathrm{Vect}(e_4,e_5)$ est un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_3))$ dans $\mathbf{R}^4$.

Exercice 11

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions d'une variable réelle et à valeurs réelles. Montrer que le sous-ensemble F des fonctions paires de E et le sous-ensemble G des fonctions impaires de E sont des sous-espaces vectoriels de E. Montrer ensuite que $E = F \oplus G$.

Exercice 12

Soient A un polynôme non-nul à coefficients réels et F l'ensemble des polynômes à coefficients réels qui sont multiples de A, i. e.

$$F = \{P \in \mathbf{R}[X] : \exists Q \in \mathbf{R}[X], P = AQ\}\,.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels et déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 13

Les couples de sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbf{R}^3$ sont-ils supplémentaires l'un de l'autre dans $\mathbf{R}^3$?

$$F_1 = \{(x,x,x) : x \in \mathbf{R}\} \text{ et } G_1 = \{(0,x,y) : (x,y) \in \mathbf{R}^2\}\,,$$
$$F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x+y+2z = 0\} \text{ et } G_2 = \{(x,y,z) : x-2y+z = 0\}\,,$$
$$F_3 = \{(x,y,x+y) : (x,y) \in \mathbf{R}^2\} \text{ et } G_3 = \{(x,-x,0) : x \in \mathbf{R}\}\,,$$
$$F_4 = \{(x,y,x+y) : (x,y) \in \mathbf{R}^2\} \text{ et } G_4 = \{(x,x,0) : x \in \mathbf{R}\}\,,$$
$$F_5 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x+y+z = 0\} \text{ et } G_3 = \{(x,y,x) : (x,y) \in \mathbf{R}^2\}\,.$$

Exercice 14

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})$ (voir exercice 11).

1. Soit $a \in \mathbf{R}$ et soit F le sous-espace vectoriel des fonctions constantes de E. Si l'on note G_a le sous-espace vectoriel des fonctions de E s'annulant en a, montrer F et G_a sont supplémentaires dans E.
2. Plus généralement soit $a_0,\ldots,a_N$ des réels deux à deux distincts et G le sous-espace vectoriel de E des fonctions s'annulant en tous les a_i, $0 \leqslant i \leqslant N$. Déterminer un supplémentaire de G dans E.

Exercice 15

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $E = F + G$. Soit $\tilde{F}$ un supplémentaire de $F \cap G$ dans F. Montrer que $E = \tilde{F} \oplus G$.

TD3: Applications linéaires

Exercice 1

Soit a un nombre complexe. Les applications de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ suivantes sont elles $\mathbf{C}$-linéaires ? $\mathbf{R}$-linéaires ?

$$f_1 : z \mapsto \bar{z}\,, \qquad f_2 : z \mapsto \Im z\,, \qquad f_3 : z \mapsto az$$
$$f_4 : z \mapsto z + a\,, \qquad f_5 : z \mapsto \bar{a}z\,, \qquad f_6 : z \mapsto \bar{a}\Im z + a\Re z\,.$$

Exercice 2

Soient a, b, c trois réels fixés. On considère les applications suivantes :

$$\begin{aligned}
f_1 &: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2\,, & (x,y) &\mapsto (3x+8y, 2x+5y)\,,\\
f_2 &: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2\,, & (x,y) &\mapsto (x-y+a, y-bx)\,,\\
f_3 &: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3\,, & (x,y,z) &\mapsto (2x+3y, 5x+7y-z, az)\,,\\
f_4 &: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3\,, & (x,y,z) &\mapsto (3x, ax+12y, bx+cy-z)\,.
\end{aligned}$$

Parmi ces applications, lesquelles sont linéaires ? Parmi celles qui sont linéaires, lesquelles sont injectives ? Surjectives ? Bijectives ?

Exercice 3

Soit f l'application

$$\begin{aligned}
f : \mathbf{R}^3 &\to \mathbf{R}^3\\
(x,y,z) &\mapsto (x+2y+3z, 3x+y+2z, 2x+3y+z)\,.
\end{aligned}$$

1. Montrer que f est linéaire, bijective et déterminer l'expression de son inverse.
2. Quelle est l'image par f de $E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x+y+z = 0\}$? Quelle est l'image de $F = \mathrm{Vect}(1,1,1)$?

Exercice 4

Soient E et F deux $\mathbf{R}$-espaces vectoriels, E_1, E_2, deux sous-espaces vectoriels de E, et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de F.

1. Montrer que les ensembles ci-dessous sont des sous-espaces vectoriels de E ou F, suivant le cas :
$$E_1 + E_2 = \{x + y : x \in E_1, y \in E_2\}\,, \qquad f(E_1), \qquad f^{-1}(F_1)\,.$$
2. Montrer que $f(E_1 + E_2) = f(E_1) + f(E_2)$.
3. Montrer que $f^{-1}(F_1) + f^{-1}(F_2) \subseteq f^{-1}(F_1 + F_2)$ et qu'il y a égalité si l'on suppose f surjective.

Exercice 5

Soient $a \in \mathbf{R}$. On considère les trois applications suivantes définies sur $C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$:

$$\varphi_1(f) = f'\,, \qquad \varphi_2(f) : \left(x \mapsto \int_0^x f(t)dt\right)\,, \qquad \varphi_3(f) : (x \mapsto f(a))\,.$$

1. Montrer que les φ_j, $1 \leqslant j \leqslant 3$, sont linéaires. Déterminer le noyau et l'image de ces trois applications linéaires.
2. Calculer $\varphi_1 \circ \varphi_2$ et $\varphi_2 \circ \varphi_1$. Obtient-on le même résultat ?

Exercice 6

Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires :

$$\begin{aligned}
&f_1 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3\,, \qquad (x,y,z) \mapsto (0,0,z)\\
&f_2 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3\,, \qquad (x,y,z) \mapsto (x,y,0)\\
&f_3 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}\,, \qquad (x,y) \mapsto x+y\\
&f_4 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3\,, \qquad (x,y,z) \mapsto (x,x+y,0)\\
&f_5 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3\,, \qquad (x,y) \mapsto (x+2y,3x,y)\\
&f_6 \circ f_6\,, \qquad \text{où } f_6 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2\,, \qquad (x,y) \mapsto (y,0)\\
&f_7 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4\,, \qquad (x,y) \mapsto (x,x,x,x)\,.
\end{aligned}$$

Exercice 7

Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ définie par :

$$f(x,y,z) = (2x-z, x+y-2z)\,.$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f. Que déduire sur l'injectivité et la surjectivité de f ?
3. Soient
$$F = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x-y = x+z = 0\}\,, \qquad G = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x+y = 0\}\,.$$
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$ et $\mathbf{R}^2$ respectivement. Décrire ensuite $f(F)$ et $f^{-1}(G)$.

Exercice 8

Donner des exemples d'applications linéaires $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vérifiant (on pourra s'inspirer des exemples d'applications données dans l'exercice 6) :

1. $\ker f \subset \mathrm{Im} f$ avec une inclusion stricte,
2. $\mathrm{Im} f \subset \ker f$ avec une inclusion stricte,
3. $\ker f = \mathrm{Im} f$.

Exercice 9

On note $\mathbf{R}_2[x]$ l'ensemble des fonctions polynomiales d'une variable réele, à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 2.

1. Montrer que $\mathbf{R}_2[x]$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. Est-ce un $\mathbf{C}$-espace vectoriel ?
2. Soit $D : \mathbf{R}_2[x] \to \mathbf{R}_2[x]$ l'opérateur de dérivation : $D(f) = f'$. Déterminer le noyau et l'image de D.

Exercice 10

Soient E, F, G trois espaces vectoriels et $g : E \to F$, $f : F \to G$ deux applications linéaires. Si $\mathrm{Im} g \subset \ker f$, que dire de $f \circ g$? Étudier la réciproque.

Exercice 11

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectioriels supplémentaires d'un espace vectoriel E. Pour chaque $x \in E$ on sait qu'il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. On dit alors que x_1 *est la projection de x sur E_1 parallèlement à E_2*. Cela permet de définir une application

$$\begin{aligned} p : E &\to E\\ x &\mapsto x_1\,. \end{aligned}$$

1. Faire un dessin dans le cas où $E = \mathbf{R}^3$, $E_1 = \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0))$, et $E_2 = \mathrm{Vect}(1,1,1)$.

2. Dans le cas général, montrer que p est un endomorphisme de E vérifiant $p \circ p = p$.
3. Dans le cas général, montrer que $\mathrm{Im} p = E_1$ et $\ker p = E_2$.
4. Dans le cas général, montrer que $E_1 = \ker(p - \mathrm{Id})$.
5. Soit f une application linéaire telle que $f \circ f = f$. Notons $F_1 = \mathrm{Im} f$, $F_2 = \ker f$. Montrer que $E = F_1 \oplus F_2$ et que f est la projection sur F_1 parallèlement à F_2.

Exercice 12

Dans $\mathbf{R}^4$ on considère les sous-espaces vectoriels :

$$E_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 : x + y = z - t, x + 2y = z\}, \qquad E_2 = \mathrm{Vect}(u_1, u_2),$$

où $u_1 = (-1, 0, 1, 1)$ et $u_2 = (1, -2, 3, 0)$.

1. Montrer que $\mathbf{R}^4 = E_1 \oplus E_2$.
2. Soit p la projection sur E_1 parallèlement à E_2 (voir l'exercice précédent). Calculer explicitement $p(x, y, z, t)$ (i.e. on donnera explicitement les coordonnées de l'image de (x, y, z, t) comme fonctions de x, y, z et t).
3. Même chose avec la symétrie s par rapport à E_2 et parallèlement à E_1.

Exercice 13

Montrer que l'application

$$(x, y, z) \mapsto (x, (y + z)/2, (y + z)/2),$$

est un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$, puis que c'est une projection (voir exercice 11) dont on déterminera le noyau et l'image.

Exercice 14

Soit $E = \mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions continues d'une variable positive à valeurs réelles. Pour $f \in E$, on définit

$$\begin{aligned} T(f) : \mathbf{R}_+ &\to \mathbf{R} \\ x \neq 0 &\mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \\ 0 &\mapsto f(0). \end{aligned}$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.
2. Discuter son injectivité et sa surjectivité. Déterminer ensuite son noyau et son image.

TD4: Familles libres, génératrices. Bases

Exercice 1. 1) Considérons les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$X_1 = (9,6,-12) \quad X_2 = (-3,-2,4) \quad Y_1 = (2,3,1) \quad Y_2 = (-2,3,0).$$

a) Les familles (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2) sont-elles linéairement indépendantes ?
b) Pour quelles valeurs du nombre réel a le vecteur $X = (1,2,a)$ appartient-il à $\mathrm{Vect}(Y_1, Y_2)$?

2) Posons $Z_1 = (-1,1,-6)$ et $Z_2 = (2,10,6)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur x, y, z pour que le vecteur (x,y,z) appartienne à $\mathrm{Vect}(Z_1, Z_2)$.

3) Posons $V_1 = (1,2,4)$, $V_2 = (1,2,-4)$ et $V_3 = (2,3,0)$. Vérifier que $\mathrm{Vect}(V_1, V_2, V_3) = \mathbb{R}^3$.

Exercice 2. Soient $X = (a,b)$ et $Y = (c,d)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'ils forment un famille libre si et seulement si :

$$ad - bc \neq 0.$$

Exercice 3. Les vecteurs suivants forment-ils un système libre dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^2$?
a)

$$(1, i) \qquad (1+i, -i)$$

b)

$$(1+2i, 1-i) \qquad (2-i, -1-i)$$

Exercice 4. 1) Préciser la relation de dépendance reliant les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants : $(3,2), (4,1), (5,-2)$.
2) Même question avec les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$: $(9,-3,7), (1,8,8), (5,-5,1)$.
3) Donner un vecteur (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ tel que $(9,-3,7), (1,8,8), (x,y,z)$ forment une base.

Exercice 5. 1) Soient a_1, a_2, a_3, a_4 quatre vecteurs linéairement indépendants d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Montrer que les vecteurs $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4$ forment un famille libre. Les vecteurs $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, a_4 + a_1$ forment-ils une famille libre ?

2) Soient n vecteurs $a_1, \ldots, a_n$ linéairement indépendants de E. A quelle condition sur n les vecteurs $a_1 + a_2, a_2 + a_3, \ldots, a_{n-1} + a_n, a_n + a_1$ forment-ils une famille libre ?

Exercice 6. Déterminer le réel λ tel que les trois vecteurs $(3,1,-4,6), (1,1,4,4), (1,0,4,\lambda)$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 7. Notons $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$.
1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donner une base de E.
3) Même question avec $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$. Les sous-espaces vectoriels E et F sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?
4) Trouver un sous-espace vectoriel H de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$E \oplus H = \mathbb{R}^3 \text{ et } F \oplus H = \mathbb{R}^3.$$

Exercice 8. Soit a un réel. On considère l'application $\Phi_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \Phi_a(x,y,z) = (4x + 8y - 2z, 3x + 4y + az, 2x + 2y + 3z).$$

1) Montrer que Φ_a est un application linéaire pour tout a.
2)Déterminer, selon la valeur de a, le noyau de Φ_a.
3)En déduire les valeurs de a pour lesquelles Φ_a est une bijection.
4) Lorsque Φ_a n'est pas une bijection, déterminer une base de l'image de Φ_a.

Exercice 9. Notons $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par :

$$A(x, y, z) = \left(\frac{x-y}{2}, \frac{-x+y}{2}, z\right).$$

1) Vérifier que A est une application linéaire, et que $A \circ A = A$.
2) Déterminer le noyau de A.
3)Déterminer une base du noyau de $A - Id_{\mathbb{R}^3}$, et montrer que $\mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Ker}(A - Id_{\mathbb{R}^3}) = \mathbb{R}^3$.

Exercice 10. Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x, y, z) = \frac{1}{6}(-2x - 4y + 4z, -4x + 4y + 2z, 4x + 2y + 4z)$$

1) Montrer que $f \circ f = Id_{\mathbb{R}^3}$.
2) Déterminer une base et une équation de $\mathrm{Ker}(f - Id_{\mathbb{R}^3})$.
3) Même question pour $\mathrm{Ker}(f + Id_{\mathbb{R}^3})$.
4) Montrer que $\mathrm{Ker}(f - Id_{\mathbb{R}^3}) \oplus \mathrm{Ker}(f + Id_{\mathbb{R}^3}) = \mathbb{R}^3$. Décrire f géométriquement.

Exercice 11. Notons E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et F le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
1) Notons P_0, P_1, P_2 les éléments de E définis par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ P_0(x) = 1, \ P_1(x) = x + 2, \ P_2(x) = x^2 + x + 1.$$

Forment-ils une famille libre dans E ?
2) Même question avec les élément f_0, f_1, f_2 de E définis par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ f_0(x) = 1, \ f_1(x) = e^x, \ f_2(x) = e^{2x}.$$

3)Notons f_0, g_1, g_2 les éléments de F définis par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ g_0(x) = 1, \ g_1(x) = e^{ix}, \ g_2(x) = e^{2ix}.$$

Forment-ils une famille libre de F ?

Exercice 12. 1) Montrer que les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f_1(x) = \sin(x), \ f_2(x) = \cos(x), \mathrm{f}_3(x) = \sin(2x), \ f_4(x) = \cos(2x)$$

forment une famille libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E constitué des applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2) Posons $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$, et considérons l'application linéaire $\varphi : E \to E$ définie par :

$$\varphi(f) = f'.$$

Vérifier que la restriction de φ à F définie une application linéaire de F dans F.
3) Montrer que φ est inversible, calculer son inverse, et interprêter.

TD5: Dimension finie

Exercice 1

Dans l'exercice 12 du TD3, déterminer la dimension de E_1 et E_2.

Exercice 2

Calculer la dimension des espaces suivants :

1. $E = \{P \in \mathbf{R}_n[X] : P(2048) = P(1) = 0\}$, où l'on rappelle que $\mathbf{R}_n[X]$ désigne le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus n.
2. $H_1 \cap H_2$ où H_1 et H_2 sont des hyperplans distincts d'un espace vectoriel E de dimension finie.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme *nilpotent* non nul de E (i.e. il existe $p > 0$ tel que les endomorphismes u, u^2,..., u^{p-1} sont tous non-nuls et $u^p = 0$). Soit $x \in E$ tel que $x \notin \ker u^{p-1}$. Après avoir justifié l'existence de x, montrer que la famille $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ est libre. Que peut-on en déduire ?

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u^n et u^{n+1} ont même rang.

Exercice 5

Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes :

1. (f_1, f_2) avec$f_1 = (1, -2, 3)$ et $f_2 = (0, 1, 0)$ dans $\mathbf{R}^3$,
2. (f_1, f_2, f_3) avec $f_1 = (1, 1, 3)$, $f_2 = (0, 1, 1)$, $f_3 = (1, -1, 1)$ dans $\mathbf{R}^3$,
3. (f_1, f_2, f_3) avec $f_1 = (1, 0, 1, a + 1)$, $f_2 = (2, -a, a, 0)$, $f_3 = (0, a, a, a)$ dans $\mathbf{R}^4$, où a est un réel donné.

Exercice 6

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^4)$ tel que $u^2 = 0$. Montrer que $\mathrm{rg} u \leqslant 2$.

Exercice 7

Soient E et G deux espaces vectoriels de dimension finie et F un sous-espace de E. On note

$$H = \{f \in \mathcal{L}(E, G) : F \subseteq \ker f\}.$$

Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, G)$ et donner sa dimension. [On pourra voir H comme le noyau ou l'image d'une bonne application linéaire antre deux bons espaces vectoriels puis appliquer un théorème du cours...]

Exercice 8

Soient E et F deux $\mathbf{R}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $\mathcal{U} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E et $\mathcal{V} = (v_1, \ldots, v_n)$ une famille de vecteurs de F.

1. Montrer que si $\mathcal{U}$ est libre alors il existe une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f(u_i) = v_i$ pour tout i.
2. Montrer que si $\mathcal{U}$ est une base alors il existe *une unique* une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f(u_i) = v_i$ pour tout i.

3. Supposons $\mathcal{U}$ liée. A quelle condition existe-t'il une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $f(u_i) = v_i$ pour tout i. Si f existe, à quelle condition est-elle unique ?

4. Discuter l'existence et l'unicité des applications linéaires vérifiant les conditions suivantes

   (a) $f_1 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ telle que $f_1(1,2) = (4,2,-2)$, $f_1(0,1) = (2,1,-1)$.

   (b) $f_2 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ telle que $f_2(2,1) = (2,-1,3)$, $f_2(1,1) = (4,0,-1)$, $f_2(0,1) = (3,1/2,-5/2)$.

   (c) $f_3 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ telle que $f_3(1,2,3) = (1,2)$, $f_3(0,1,-2) = (0,1)$, $f_3(1,0,-1) = (-1,3)$.

   (d) $f_4 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ telle que $f_4(3,2) = (1,1,-2)$, $f_4(1,1) = (2/5,2/5,-4/5)$, $f_4(2,3) = (1,1,-2)$.

   (e) $f_5 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ telle que $f_5(1,1,1) = (1,2)$, $f_5(0,1,2) = (-1,1)$, $f_5(-1,0,1) = (0,3)$.

Exercice 9

Soit $(e_1,\ldots,e_4)$ la base canonique de $\mathbf{R}^4$ et soit $a \in \mathbf{R}$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^4)$ l'endomorphisme déterminé par :

$$f(e_1) = e_2 - e_3 - ae_4\,, \qquad f(e_2) = e_1 + e_4\,, \qquad f(e_3) = ae_1 + e_2 - e_3\,, \qquad f(e_4) = (a-1)e_1 - ae_2 + ae_3 + ae_4\,.$$

1. Déterminer, selon les valeurs de a, une base pour $\ker f$ et pour $\mathrm{Im} f$.

2. Pour quelles valeurs de a a-t-on $\mathbf{R}^4 = \ker f \oplus \mathrm{Im} f$? Pour les autres valeurs de a, déterminer un supplémentaire de $\ker f$ et de $\mathrm{Im} f$ dans $\mathbf{R}^4$.

Exercice 10

Soient $v_1 = (1,-1,2,3)$ et $v_2 = (3,0,4,-2)$ deux vecteurs de $\mathbf{R}^4$.

1. Montrer que $\{v_1, v_2\}$ est un système libre et le compléter en une base de $\mathbf{R}^4$.

2. Soit $u = (1,2,0,-8)$. Quel est le rang de $\{v_1, v_2, u\}$?

Exercice 11

Soient $v_1 = (1,0,1,-2)$, $v_2 = (1,1,1,-2)$, et $v_3 = (1,2,1,-2)$ trois vecteurs de $\mathbf{R}^4$.

1. Déterminer le rang du système (v_1, v_2, v_3) et donner une base de $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$.

2. Trouver tous les supplémentaires de F dans $\mathbf{R}^4$ engendrés par des vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^4$.

3. Écrire un système d'équations caractérisant les quadruplets (a,b,c,d) de $\mathbf{R}^4$ satisfaisant $ax+by+cz+dt = 0$ pour tout vecteur $(x,y,z,t) \in F$. En déduire un système libre d'équations cartésiennes de F.

Exercice 12

Soit F un sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$, on note

$$F^{\perp} = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n : \forall (x_1,\ldots,x_n) \in F, a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0\}\,.$$

1. Montrer que $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.

2. Si F_1 et F_2 désignent deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$, montrer la formule :

$$(F_1 \cap F_2)^{\perp} = F_1^{\perp} + F_2^{\perp}\,.$$

3. Montrer que $\mathbf{R}^n = F \oplus F^{\perp}$.

4. On considère les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbf{R}^4$:

$$F_1 = \{(x,y,z,t) : x - y + t = 2x + z - t = x - 3y - z + 4t = 0\}\,,$$
$$F_2 = \{(x,y,z,t) : x + y + 2z + t = z + 3t = 0\}\,.$$

   Touver une base pour chacun des sous-espaces suivants : F_1, F_2 ,$F_1 \cap F_2$, $F_1 + F_2$. Vérifier que l'égalité de la question 2 est vérifiée dans le cas particulier présent.

Exercice 13

On considè les polynômes (appelés *polynômes de Chebychev*) définis par récurrence de la manière suivante :

$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,\ T_{n+1}(x) = xT_n(x) - T_{n-1}(x),\ n \geqslant 1\,.$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, le degré de T_n est n.
2. Montrer que la famille $\{T_0(x), T_1(x), \dots, T_n(x)\}$ est libre dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}_n[x]$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus n.
3. Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Montrer que $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ pour tout $n \geqslant 0$.

Exercice 14

Dans $\mathbf{R}^{n-1}$ on considère la famille de vecteurs

$$\begin{aligned} v_1 &= (n-1, -1, \dots, -1)\,, \\ v_2 &= (-1, n-1, -1, \dots, -1)\,, \\ &\vdots \\ v_{n-1} &= (-1, -1, -1, \dots, -1, n-1)\,. \end{aligned}$$

Quel est le rang de $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$?

Exercice 15

Soient $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ des applications linéaires définies respectivement par

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n\,, \qquad g(y) = (b_1y, \dots, b_ny)\,,$$

où $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$ sont des réels fixés.

1. Discuter le rang de f et de g en fonction de la valeur des a_i et des b_j.
2. Même question pour $\mathrm{rg}\,(f \circ g)$ et $\mathrm{rg}\,(g \circ f)$.

Exercice 16

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie. Soient

$$f : E \to F\,, \qquad g : F \to G\,,$$

deux applications linéaires. Montrer que

$$\mathrm{rg}\,(g \circ f) \leqslant \min\{\mathrm{rg}\, f, \mathrm{rg}\, g\}\ .$$

TD6: Matrices et systèmes

Exercice 1

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Quels sont les produits matriciels que l'on peut calculer ? Cette liste contient-elle des matrices symétriques ? Antisymétriques ?

Exercice 2

Calculer, lorsqu'ils ont un sens, les produits matriciels AB et BA dans les cas suivants :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Soient a et b deux réels non-nuls et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Trouver toutes les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ qui commutent avec A.

Exercice 4

Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$ canoniquement associées aux matrices suivantes (dans chaque cas on précisera d'abord les valeurs de n et p) :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice qui commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (i.e. pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on a $AB = BA$). Montrer qu'il existe un réel λ tel que $A = \lambda \mathrm{Id}_n$. [On pourra utiliser les matrices élémentaires .]

Exercice 6

Donner le rang des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7

On considère trois systèmes linéaires dont les matrices sont les suivantes (le paramètre m apparaissant dans la troisième matrice est un réel fixé) :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 5 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & m \\ -m & 1 & m \\ 1 & -m & -1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mettre les systèmes correspondant à chacune de ces matrices sous forme triangulaire.

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbf{R}$ les systèmes suivants par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ -3x + 5y = 1 \\ 7x - 11y = -1 \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} x - y + 3z = 6 \\ 3x + -2y + 7z = 14 \\ x + 3y - 3z = -4 \end{cases} \tag{2}$$

Exercice 9

1. Résoudre le système suivant en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbf{R}$:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ -x + 6y + 2z = 5 \\ 7x + 3y + z = \lambda \end{cases} \tag{3}$$

2. Même question avec le système suivant dépendant du paramètre réel m :

$$\begin{cases} x + y + mz = m \\ x + y - z = 1 \\ x + my - z = 1 \end{cases} \tag{4}$$

Exercice 10

Soient a et b deux nombres complexes. Résoudre le système suivant en fonction des valeurs de a et b :

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases} \tag{5}$$

Exercice 11

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer AB, AC. Que constate-t-on ? La matrice A peut-elle être inversible ?

Exercice 12

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - \mathrm{Id}_3$. Calculer B^n pour tout $n \in \mathbf{N}$. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 13

Montrer que dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices antisymétriques forment deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Exercice 14

Soient (a_n), (b_n), (c_n) trois suites réelles définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, $c_0 = 7$, et

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 3b_n + c_n \\ c_{n+1} = 3c_n \end{cases} \tag{6}$$

1. Pour tout $n \geqslant 0$, on note $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Exhiber une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$. Déduire une expression de X_n en fonction d'une puissance de A et de X_0.
2. On note $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Quel est le rang de N ? Calculer N^p pour tout entier $p \geqslant 1$.
3. Montrer que
$$A^n = 3^n \mathrm{Id}_3 + 3^{n-1} nN + 3^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} N^2 \,.$$
4. En déduire a_n, b_n, c_n en fonction de n.

TD7: Matrices d'applications linéaires, systèmes

Exercice 1. (1) Mettre le système suivant sous forme échelonnée (triangulaire) :

$$\begin{cases} 2x + y - z = a \\ x + my + z = b \\ 3x + y - mz = c \end{cases}$$

(2)Quelle est la condition pour que ce système admette une unique solution? Donner le rang de ce système.

Exercice 2. Calculer le rang des matrices suivantes (où a est un paramètre réel) :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 4 \\ 1 & 8 & 5 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \\ a & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & a \\ a & 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.(1)Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Si $ad - bc \neq 0$, montrer que A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

(2)En utilisant la formule de A^{-1}, résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 3x + 7y = 4 \end{cases}$$

Exercice 4. Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, et $B = A + 2I$, où I est la matrice identité.

1. Montrer que A est inversible, et calculer son inverse A^{-1}.
2. Calculer B^n pour $n \geq 1$, en déduire A^n.
3. Montrer que $A^2 = 2I - A$.
4. Refaire la question 1 en utilisant la question 3.
5. Montrer que les matrices A et B commutent. Est-ce que les matrices A^{-1} et B commutent ?

Exercice 5. Soit $E = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Pour tout nombre réel λ, on désigne par f_λ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base E est la matrice A_λ suivante :

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda - 1 & 3\lambda & 3\lambda \\ 1 & 0 & \lambda + 1 & 2 \\ 1 & 0 & \lambda + 1 & \lambda + 2 \end{pmatrix}.$$

1. Pour quelles valeurs de λ, A_λ est inversible ? Calculer la matrice A_λ^{-1}.

2. Donner un système d'équations cartésiennes de $\mathrm{Ker}(f_0)$, ainsi qu'une base de $\mathrm{Ker}(f_0)$, que l'on notera B_0.
3. Donner un système d'équations cartésiennes de $\mathrm{Im}(f_0)$, ainsi qu'une base de $\mathrm{Im}(f_0)$.
4. Soit $B_1 = (e_2, e_1 + e_3 + e_4)$. Montrer que B_1 est libre et que $\mathrm{Vect}(B_1)$ est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f_0)$.
5. Donner la matrice de f_0 dans la base $B_0 \cup B_1$.

Exercice 6. Soit $E = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soient f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$, dont les matrices dans la base E sont respectivement :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Est-ce que f et g commutent ?
2. Montrer que $B = (b_1, b_2, b_3) := (e_2 - e_3, e_1, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Donner la matrice de passage P de la base E à la base B.
4. Calculer les composants de $f(b_3), g(b_3)$ dans la base canonique E, puis dans la base B.
5. Donner les matrices T_f et T_g de f et g dans la base B. Est-ce que les matrices T_f et T_g commutent ?
6. Donner les matrices de $f + g$ et $f \circ g$.

Exercice 7. On considère f, g les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$, dont les matrices sont respectivement :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Est-ce que g est bijective ?
2. Écrire la matrice de $g \circ f$.
3. Trouver les vecteurs $X \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(X) = 2X$.
4. Montrer qu'il n'existe pas une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = B$.

Exercice 8. Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Soit λ un réel et I la matrice identité. Écrire la matrice $B = A - \lambda I$.
2. On considère le système linéaire, d'inconnues x, y, z :

$$\begin{cases} (3-\lambda)x - 2y = 0 \\ x - \lambda y = 0 \\ y - \lambda z = 0 \end{cases}$$

   On désigne V_λ l'espace des solutions (x, y, z) de ce système. Montrer que si $\lambda \notin \{0, 1, 2\}$, $V_\lambda = \{(0, 0, 0)\}$.
3. Pour quelles valeurs de λ la matrice B est inversible ?
4. Montrer que $\mathbb{R}^3 = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2$.
5. Montrer qu'il existe une matrice P telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
6. Calculer A^n en fonction de n.

Exercice 9. Considérons l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $f \circ f = f$.
2. En déduire que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$.
3. Déterminer une base B_1 de $\mathrm{Ker} f$ et une base B_2 de $\mathrm{Im} f$.
4. Chercher la matrix inversible P telle que

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

5. Décrire géométriquement f.

Exercice 10. E est un espace vectoriel de dimension finie. Soient p, q deux endomorphismes de E, et p est une projection.

1. Montrer que q est une projection si et seulement si $\mathrm{Id}_E - q$ est une projection.
2. Montrer que $\mathrm{Ker} p = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - p)$ et que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - p) = \mathrm{Im} p$.
3. Montrer que $E = \mathrm{Ker} p \oplus \mathrm{Im} p$.
4. Montrer que $p \circ q = q \circ p$ si et seulement si $\mathrm{Ker} p$ et $\mathrm{Im} p$ sont stables par q.
5. Supposons que q est aussi une projection. Montrer que $p + q = \mathrm{Id}_E$ si et seulement si $E = \mathrm{Im} p \oplus \mathrm{Im} q$.

Exercice 11. (1)Effectuer les divisions euclidiennes de P par Q dans les cas suivants :

1. $P(X) = X^5 - 2X^4 + 8X^2 - X - 1$ $\qquad Q(X) = X + 1$
2. $P(X) = X^5 - 2X^4 + 8X^2 - X - 1$ $\qquad Q(X) = X^2 + X + 1$
3. $P(X) = (X - 2)^n + 1$ $\qquad Q(X) = X - 1$

(2)Considérons les polynômes $P(X) = X^3 + X^2 + X - 3$ et $Q(X) = 2X^3 - X^2 - 5X + 4$. Cherchons un codiviseur de P et Q de degré maximum.

(3)Supposons le théorème suivant (le théorème fondamontal de l'algèbre) : tout polynôme complexe non constant admet une racine. Montrer par récurrence que un polynôme complexe de degré $n \geq 1$ admet exactement n racines.

Exercice 12. On note par $\mathbb{R}_3[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 3. On considère f l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de P par $X - 1$, et g l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de P par $(X - 1)^2$.

1. Montrer que f et g sont linéaires.
2. Déterminer les noyaux et les images de f et g.
3. Montrer que le noyau et l'image de f sont deux espaces supplémentaires. Le noyau et l'image de g sont-ils deux espaces supplémentaires ?

Exercice 13. On note, pour $n \in \mathbb{N}$, par $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$ à coefficients réels.

1. Déterminer les éléments (a, b, c, d) tels que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ on ait $aP(X + 1) + bP(X) + cP(X - 1) + dP'(X) = 0$.

2. Montrer que pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$ les quatre polynômes $P(X+1), P(X), P(X-1), P'(X)$ forment une famille libre de $\mathbb{R}_4[X]$ si et seulement si P est de degré 4.
3. Montrer que l'application $f : P \in \mathbb{R}_3[X] \longmapsto (P(1), P(0), P(-1), P'(0)) \in \mathbb{R}^4$ est une bijection linéaire. Déterminer les images P_1, P_2, P_3, P_4 par la bijection réciproque de la base canonique de $\mathbb{R}^4$. En déduire que pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$ il existe un unique vecteur $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $P = aP_1 + bP_2 + cP_3 + dP_4$ et déterminer les coordonnées a, b, c, d en fonction de P.
4. On considère l'application linéaire $g : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3$ définie par $g(P) = (P(1), P(0), P'(0))$. Déterminer son noyau et son image.