Exercices Bonux

27 janvier 2012

Exercice 0.1 : Sout A, B, C et D des sous-parties de E. On note, pour $F \subset E$, $F^c = E \backslash F$ le complémentaire de F dans E. Comparer :

1. $(A \cap B)^c$ et $A^c \cap B^c$;
2. $(A \cup B)^c$ et $A^c \cup B^c$;
3. $(A \cap B) \times (C \cap D)$ et $(A \times C) \cap (B \times D)$;
4. $(A \cup B) \times (C \cup D)$ et $(A \times C) \cup (B \times D)$

Exercice 0.2 : Soit E un ensemble et $A,\ B,\ C \subset E$. Démontrer les propiétés suivantes :

1. $A \subset B \implies \bar{B} \subset \bar{A}$
2. $\bar{\bar{A}} = A$
3. $A \subset C$ et $B \subset C \implies (A \cup B) \subset C$
4. $A \subset B \iff A = A \cap B$
5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
7. $A \bar{\cap} B = \bar{A} \cup \bar{B}$
8. $A \bar{\cup} B = \bar{A} \cap \bar{B}$
9. si on note $A \backslash B = \{x \in A | x \notin B\}$, montrer que $A \backslash B = A \cap \bar{B}$

Exercice 0.3 (Différence symétrique) **:** Soit E un ensemble, pour $A,\ B \subset E$, on appelle *différence symétrique* de A et B l'ensemble $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

1. Montrer que $A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$. Faire un dessin.
2. Calculer $A \Delta A$, $A \Delta \emptyset$, $A \Delta E$ et $A \Delta \bar{A}$.
3. Montrer que $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$ et que $(A \Delta B) \cup C = (A \cup C) \Delta (B \cup C)$.
4. Démontrer que $A \Delta B = B \iff A = \emptyset$. Justifier le mot symétrique dans la définition de Δ.

Exercice 0.4 : Soit $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^*$ et telle que $f(n,p) = 2^n(2p+1)$. Montrer que f est une bijection. En déduire une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.

Exercice 0.5 : L'application $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$, $(p,q) \mapsto p + \frac{1}{q}$ est-elle injective ? surjective ?

Exercice 0.6 : Soient X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$.

1. Montrer que f est injective si et seulement si $\forall g : Z \to X$ et $\forall h : Z \to X$, $f \circ g = f \circ h \implies g = h$, où Z est un ensemble quelconque.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si $\forall g : Y \to Z$ et $\forall h : Y \to Z$, $g \circ f = h \circ f \implies g = h$.
3. Montrer que $f \circ g$, $h \circ f$ bijectives $\iff$ f, g, h bijectives, pour toutes fonctions $g : Z \to X$ et $h : Y \to T$.

Exercice 0.7 : Soit $f : E \to F$. Montrer que f est bijective si et seulement si $\forall A \subset E$, $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.