Université de Paris XI
L1 - 2ème semestre 2012-13

Math 103
Algèbre linéaire

Devoir 1
Correction

1-a).
Soit $P(t) = a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4$ un polynôme de $\mathcal{P}_4$.

$$P \in E \iff \begin{cases} P(1) = 0 \\ P(-1) = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a + b + c + d + e = 0 \\ a - b + c - d + e = 0 \end{cases}$$

1-b).

$$\begin{cases} a + b + c + d + e = 0 \\ a - b + c - d + e = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a + b + c + d + e = 0 \\ 2b + 2d = 0 & L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a + b + c + d + e = 0 \\ b + d = 0 & L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a + c + e = 0 \\ b + d = 0 \end{cases}$$

Ce qui nous donne dans $\mathcal{P}_4$, $\{P(t) = -c-e-dt+ct^2+dt^3+et^4, c, d, e \in \mathbb{R}\} = \{P(t) = c(t^2-1)+dt(t^2-1)+e(t^4-1), c, d, e \in \mathbb{R}\}$. On note alors $R(t) = t^2-1$, $S(t) = t(t^2-1)$ et $T(t) = t^4-1$ des polynômes de $\mathcal{P}_4$. On a évidemment $R, S, T \in E$ en prenant respectivement $c = 1, d = 0, e = 0$; $c = 0, d = 1, e = 0$ et $c = 0, d = 0, e = 1$. D'autres parts, on voit alors que $P \in E \iff \exists c, d, e \in \mathbb{R}$ tels que $P(t) = cR(t) + dS(t) + eT(t)$. Donc R, S, T engendrent E.

Il reste donc à voir que la famille R, S, T est libre. On veut donc résoudre en c, d, e l'équation $0 = cR + dS + eT$. Mais en développant les polynômes R, S et T, on trouve donc $0 = -c - e - dt + ct^2 + dt^3 + et^4$. Or la famille $(1, t, t^2, t^3, t^4)$ est une base de l'espace des polynômes. Elle est donc libre. Ce qui nous donne $-c - e = -d = c = d = e = 0$, *i.e.* $c = d = e = 0$. Donc la famille (R, S, T) est libre.

2-a).

$$P(t) \in F \iff \begin{cases} P'(1) = 0 \\ P'(-1) = 0 \end{cases}$$

Or $P'(t) = b + 2ct + 3dt^2 + 4et^3$ si $P(t) = a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4$. Donc :

$$P(t) \in F \iff \begin{cases} b + 2c + 3d + 4e = 0 \\ b - 2c + 3d - 4e = 0 \end{cases}$$

2-b)

$$\begin{aligned} P(t) \in F &\iff \begin{cases} b + 2c + 3d + 4e = 0 & \\ 4c + 8e = 0 & \qquad L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b + 2c + 3d + 4e = 0 & \\ c + 2e = 0 & \qquad L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b + 3d = 0 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ c + 2e = 0 & \end{cases} \end{aligned}$$

Ce qui donne dans $\mathcal{P}_4$, $F = \{P(t) = a - 3dt - 2et^2 + dt^3 + et^4, a, d, e \in \mathbb{R}\} = \{P(t) = a + dt(t^2 - 3) + et^2(t^2 - 2), a, d, e \in \mathbb{R}\}$.

En prenant $a = 1, d = 0, e = 0$; $a = 0, d = 1, e = 0$ et $a = 0, d = 0, e = 1$, on obtient les polynômes $U(t) = 1$, $V(t) = t(t^2 - 3)$ et $W(t) = t^2(t^2 - 2)$ de F respectivement. On a alors $F = \{P(t) = aU(t) + dV(t) + eW(t), a, d, e \in \mathbb{R}\}$. Donc U, V, W engendrent F. On va montrer que ces polynômes sont linéairement indépendants.

Soit $aU(t) + dV(t) + eW(t) = 0$, avec $a, d, e \in \mathbb{R}$. En développant les polynômes U, V, W, on trouve $0 = a - 3dt - 2et^2 + dt^3 + et^4$. Or la famille $(1, t, t^2, t^3, t^4)$ est une base de $\mathbb{R}[t]$ donc libre et donc on a $a = 3d = 2e = d = e = 0$. Donc la famille (U, V, W) est bien libre.

3).

Pour montrer que le système $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ engendre $\mathcal{P}_4$, il suffit de montrer que la base canonique de $\mathcal{P}_4$ $(1, t, t^2, t^3, t^4)$ est dans $\mathrm{Vect}\ (\mathcal{U}, \mathcal{V})$. Or $1 = U$ donc $1 \in \mathrm{Vect}\ (\mathcal{U}, \mathcal{V})$; $S(t) - V(t) = 2t \in \mathrm{Vect}\ (\mathcal{U}, \mathcal{V})$; $R(t) + U(t) = t^2 \in \mathrm{Vect}\ (\mathcal{U}, \mathcal{V})$; $3S(t) - V(t) = 2t^3 \in \mathrm{Vect}\ (\mathcal{U}, \mathcal{V})$ et $T(t) + U(t) = t^4 \in \mathrm{Vect}\ (\mathcal{U}, \mathcal{V})$. Donc la base canonique est engendrée par le système $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ et donc $\mathrm{Vect}\ (\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \mathcal{P}_4$.

Mais cette famille n'est pas libre. En effet : $W - T + 2R - U = 0$. On va donc en extraire une sous-famille libre en utilisant l'algorithme du rang.

On voit d'abord que les vecteur R, S, T sont libres d'après la question 1-b). Donc la sous famille (R, S, T) de $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ est libre. De plus, si on pose $I(t) = t$, la sous-famille (R, S, T, U) est également libre car c'est une sous-famille de la famille de polynômes échelonnées en degrés (R, S, T, U, I) qui est donc libre. On veut donc maintenant voir si $V \in \mathrm{Vect}\ (R, S, T, U)$ ou non. Or $V(t) = S(t) - 2t$. Donc $\mathrm{Vect}\ (R, S, T, U, V) = \mathrm{Vect}\ (R, S, T, U, I)$ et (R, S, T, U, V) est libre puisque (R, S, T, U, I) l'est. Et finalement, $W = T - 2R + U \in \mathrm{Vect}\ (R, S, T, U, V)$. Donc (R, S, T, U, V) est une base de $\mathcal{P}_4$.

4-a).

Soit $A(t) = t^2 - 1$. On a clairement, $\deg(A) = 2 \leq 4$ donc $A \in \mathcal{P}_4$. Et $A(1) = 1 - 1 = 0$ et $A(-1) = 1 - 1 = 0$. Donc par définition de E, $A \in E$.

4-b).

Commençons par le sens indirect : si l'on considère $P = AQ$, avec Q un polynôme de degré ≤ 2. On a alors $\deg(P) = \deg(A) + \deg(Q) \leq 2 + 2 = 4$. Donc $P \in \mathcal{P}_4$. De plus $P(1) = A(1)Q(1) = 0$ et $P(-1) = A(-1)Q(-1) = 0$. Donc $P \in E$ par définition de E.

Voyons maintenant le sens direct. On sait déjà, par la question 1-b), que $R, S, T \in E$ et que $E = \mathrm{Vect}\ (R, S, T)$. Or $R = A$, $S(t) = t(t^2 - 1) = tA(t)$ et $T(t) = t^4 - 1 = (t^2 + 1)A(t)$. Donc $E = \mathrm{Vect}\ (R, S, T) = \{\alpha R + \beta S + \gamma T, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha + \beta t + \gamma(t^2 + 1))A, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha + \gamma + \beta t + \gamma t^2)A, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$. Donc si $P \in E$, alors $\exists Q \in \mathcal{P}_4$ tel que $P = QA$ avec $\deg(Q) \leq 2$ ($Q = \alpha + \gamma + \beta t + \gamma t^2$).

Il y a une autre façons de faire le sens direct en utilisant l'arithmétique des polynômes : Soit $P \in E$. Donc par définition, $P(1) = P(-1) = 0$. Donc 1 et -1 sont des racines de P. Donc le polynôme $(t-1)(t+1)$ divise P, i.e. il existe une polynôme Q tel que $P = (t-1)(t+1)Q = (t^2 - 1)Q = AQ$. Mais on a alors $\deg(P) = \deg(AQ) = \deg(A) + \deg(Q) = 2 + \deg(Q)$. Donc $\deg(Q) = \deg(P) - 2 \leq 4 - 2 = 2$. Donc Q est un polynôme de degré ≤ 2 et est donc en particulier dans $\mathcal{P}_4$.

5).

Soit $P \in E \cap F$. Comme $P \in E$ en particulier, on a d'après la question précédente, $P = AQ$, avec Q de degré 2 au plus. Mais dans ce cas, $P'(t) = A'(t)Q(t) + A(t)Q'(t) = 2tQ(t) + (t^2 - 1)Q(t)$. Or $P \in F$. Donc $P'(1) = A'(1)Q(1) + A(1)Q'(1) = A'(1)Q(1) = 0$ car $A(1) = 0$. On a donc $2Q(1) = 0 \iff Q(1) = 0$. De même, on a aussi $Q(-1) = 0$. Donc, par la question 4-b), le polynôme Q est dans E. Et donc Q s'écrit $Q = AB$. Mais par étude des degrés, on voit que $\deg(B) = 0$, donc c'est une constante $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi $P = A \times \lambda A = \lambda A^2$. Donc $E \cap F \subset \{\lambda A^2, \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\ (A^2) = \mathrm{Vect}\ ((t^2 - 1)^2) = \mathrm{Vect}\ (t^4 - 2t^2 + 1)$.

Il reste à voir l'inclusion contraire. D'après la question 4-b), on sait déjà que $A^2 \in E$. De plus, $(A^2)' = 2AA'$. Donc $(A^2)'(1) = 2A(1)A'(1) = 0 = 2A(-1)A'(-1) = (A^2)'(-1)$. Donc $A^2 \in F$. Donc $A^2 \in E \cap F$. Et multiplier par une constante ne change rien aux équations qui définissent E et F. Donc on a $\mathrm{Vect}\ (A^2) \in E \cap F$.

D'où l'égalité $\mathrm{Vect}\ (A^2) = E \cap F$.

6).

Soit C un polynôme de $\mathcal{P}_4$ tel que $C(0) = C'(0) = C'(1) = C'(-1) = 0$ et $C(1) = C(-1) = 1$. Comme $C(0) = 0$, on sait que C est divisible par t et comme il est de degré au plus 4, C peut s'écrire $C(t) = t(at^3 + bt^2 + ct + d)$. On a alors $C'(t) = 4at^3 + 3bt^2 + 2ct + d$. On en déduit $C'(0) = d = 0$. Et on a le système :

$$\begin{cases} C'(1) = 0 \\ C'(-1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4a + 3b + 2c = 0 \\ -4a + 3b - 2c = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 6b = 0 & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ -4a + 3b - 2c = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} b = 0 \\ 2a + c = 0 \quad L_2 \leftarrow \frac{-1}{2} L_2 \end{cases}$$

On a donc pour le moment $C(t) = t(at^3 + ct) = t^2(at + c)$. Finalement, on utilise $C'(1) = 0$ et $C(1) = 1$ pour trouver le dernier système :

$$\begin{cases} C'(1) = 0 \\ C(1) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a + c = 0 \\ a + c = 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a = -1 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ a + c = 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a = -1 \\ c = 2 \end{cases}$$

Ainsi, on obtient le polynôme $C(t) = t^2(2 - t^2)$.

La résolution des systèmes nous assure l'unicité du polynôme C. Mais on peut la prouver *a priori* : supposons qu'il existe un seconde polynôme B de degré ≤ 4 différent de C qui vérifie les mêmes conditions. On note dans ce cas $D = C - B$. On a donc $D \in \mathcal{P}_4$. Et De plus, D vérifie :

$$D(0) = D(1) = D(-1) = D'(1) = D'(-1) = 0$$

Les quatre dernières égalités nous permettent de dire que $D \in \mathrm{Vect}\ (A^2)$ par la question 5). Donc $D = \lambda A^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Mais on sait aussi que $D(0) = \lambda A^2(0) = \lambda = 0$. Donc $D = 0$. Donc $B = C$. D'où, si l'on a deux polynômes qui vérifient les mêmes conditions que C, alors ils sont égaux. Autrement dit, C est unique.