Université de Paris XI **Math 103**
L1 – 2ème semestre 2012-13 **Algèbre linéaire**

Devoir 2

Sous-espaces de $\mathbb{R}^6$.
A rendre en TD au plus tard le 13 Mars.

Soit $E \subset \mathbb{R}^6$ l'espace des solutions du système linéaire (S) $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + x_6 &= 0 \\ -x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_4 + x_5 + x_6 &= 0 \end{cases}$.

On note $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$ la base canonique de $\mathbb{R}^6$. On considère d'autre part les vecteurs $f_1 = e_1 + e_5 - e_3, f_2 = e_2 + e_6 - e_1, f_3 = e_3 + e_4 - e_2, f_4 = -(e_4 + e_5 + e_6)$ et on pose $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$.

1) Donner une base $\mathcal{B}$ et la dimension de E.

2-a) Donner une base $\mathcal{B}'$ et la dimension de F.
2-b) Donner un système d'équations cartésiennes de F.

3) Déterminer $E \cap F$, puis montrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^6$.

4) Soit maintenant $G = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3, e_4, e_5, e_6)$ et $H = \mathrm{Vect}(e_4, e_5, e_6)$.
4-a) Montrer que $F + H = G$ et que $F \cap H$ est la droite vectorielle engendrée par f_4. Quelle est le rang de $(f_1, f_2, f_3, e_4, e_5, e_6)$? Donner une équation cartésienne de G.
4-b) Peut-on avoir $E \subset G$? Peut on avoir $\dim(E \cap G) \leq 1$? Déduire de ce qui précède que $E \cap G$ est un plan P.
4-c) Donner une base $\mathcal{B}''$ de P. Montrer que $(\mathcal{B}', \mathcal{B}'')$ forme une base de G, puis donner les coordonnées de e_4, e_5, e_6 dans cette base.