Feuille d'exercices 1

Systèmes linéaires.

Si on préfère, on pourra présenter la résolution des systèmes linéaires en utilisant des tableaux de nombres, mais alors sans omettre d'indiquer les **inconnues** *au dessus de la colonne correspondante (une résolution sans indication d'inconnue sera comptée fausse aux examens).*

Exercice 1.1 – Réviser ses classiques... dans le plan. Soient D_1, D_2 deux droites du plan $\mathbb{R}^2$ d'équations respectives $(E_1) : 2x - y + 2 = 0$, $(E_2) : x + y + 1 = 0$.

1. Montrer qu'un point $A = (x, y)$ du plan est à l'intersection de D_1 et D_2 si et seulement si ses coordonnées vérifient un certain système linéaire (S) à deux inconnues et deux équations qu'on précisera.

2. Résoudre (S) et déterminer A.

3. Soit maintenant $B = (-1, 1)$ (différent de A !). Faire rapidement un dessin représentant D_1, D_2, A, B. Donner une équation de la droite (AB).

4. Soit enfin D_2' la droite d'équation $(E_2') : x + y - 1 = 0$.

a. Ecrire le système (S') dont les solutions sont les composantes des points de $D_2 \cap D_2'$. Résoudre (S'). Qu'en déduire pour les vecteurs directeurs de D_2 et D_2' ?

b. Rappeler comment on trouve un vecteur normal à une droite $D \subset \mathbb{R}^2$ à partir d'une équation cartésienne de $D : ax + by + c = 0$. Donner aussi un vecteur directeur. Retrouver par cette méthode le résultat obtenu dans la question précédente.

Exercice 1.2 – Un peu de géométrie dans l'espace

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ on considère d'une part la droite D passant par $O = (0, 0, 0)$ et de vecteur directeur $u = (1, 1, 2)$, et d'autre part le plan P d'équation $-2x + 3y - z = 5$.

1. Donner une représentation paramétrique linéaire de la droite D : montrer que tout point M de D s'écrit sous la forme $M = M(t)$, où les composantes $x(t), y(t), z(t)$ de $M(t)$ sont des fonctions affines de t dont on précisera les expressions.

2. Ecrire la condition que doit vérifier t pour que le point $M(t)$ appartienne au plan P. En déduire l'unique point d'intersection de D avec P.

Exercice 1.3 – Méthode du pivot Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1) \begin{cases} x + 2y & = 3 \\ 4x + 5y & = 6 \end{cases}, \quad (S_2) \begin{cases} x + y + z & = 1 \\ 2x - y + 3z & = -1 \\ 4x - 4y + 8z & = -4 \end{cases}, \quad (S_2') \begin{cases} x + y + z & = 1 \\ 2x - y + 3z & = -1 \\ 5x - 4y + 8z & = -4 \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} x - 3y + z - t & = 0 \\ -x + 2y - z - 2t & = 1 \\ -3x + 7y - 3z - 3t & = 2 \\ -x - z - 8t & = 3 \end{cases}$$

Vous avez certainement choisi de considérer que les inconnues des systèmes $(S_1), (S_2), (S_3)$ *étaient respectivement :* $(x, y), (x, y, z), (x, y, z, t)$*, puis vous avez résolu le système avec ce choix en tête, et vous avez eu raison.* Répondre maintenant à la question : résoudre le système (S_1) aux inconnues (x, y, z). Quelle est la différence avec la réponse initiale ?

Exercice 1.4 – Méthode du pivot - suite. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2x+3y &= 10 \\ -3x+5y &= 1 \\ 7x-10y &= -3 \end{cases}, \begin{cases} 2x+3y &= 12 \\ -3x+5y &= 1 \\ 7x-11y &= -1 \end{cases}, \begin{cases} x-y+3z &= 6 \\ x+3y-3z &= -4 \end{cases}, \begin{cases} 2x+y-z-2t &= 2 \\ x+2y+3z+2t &= 1 \end{cases}$$

Exercice 1.5 – On considère les trois systèmes linéaires

$$(S_1) \begin{cases} x-y+3z &= 6 \\ x+3y-3z &= -4 \end{cases}, (S_2) \begin{cases} x+y+z &= 2 \\ 3x+3y+z &= 2 \end{cases}, (S) \begin{cases} x-y+3z &= 6 \\ x+3y-3z &= -4 \\ x+y+z &= 2 \\ 3x+3y+z &= 2 \end{cases}$$

1. Sans résoudre les systèmes, donner le lien entre les trois ensembles de solution : $\mathrm{Sol}(S_1)$, $\mathrm{Sol}(S_2), \mathrm{Sol}(S)$. Résoudre alors les trois systèmes.

2. En termes de géométrie dans l'espace, quelle est la nature des ensembles $\mathrm{Sol}(S_1), \mathrm{Sol}(S_2)$? Enoncer le résultat géométrique correspondant à la détermination de $\mathrm{Sol}(S)$.

3. Résoudre les systèmes linéaires homogènes associés à $(S_1), (S_2), (S)$. Quel est le rapport entre les ensembles de solutions trouvés à cette question et ceux trouvés à la question précédente ?

Exercice 1.6 – Pari

On considère les deux systèmes suivants, où malheureusement des chiffres ont été effacés et sont illisibles (remplacés par des ?)

$$(S_1) \begin{cases} x+5y-?1z = 23 \\ 2x+1?y-62z = 4? \end{cases}, (S_2) \begin{cases} 3x+4y = ? \\ 12x+?6y = 4 \\ 4?x+56y = 14 \end{cases}$$

1. Dites sans aucun calcul, le plus vite possible, quelle est selon vous la réponse la plus probable

1. L'ensemble des solutions de (S_1) est vide
2. L'ensemble des solutions de (S_1) est infini
3. L'ensemble des solutions de (S_2) est vide
4. L'ensemble des solutions de (S_2) est infini
5. L'ensemble des solutions de (S_2) est un singleton

2. Pour les deux systèmes, donner les bonnes valeurs aux ? pour que les réponses ci-dessus soient justes. (S_1) peut-il n'avoir qu'une solution ?

Exercice 1.7 – Traduction d'une question vectorielle en un système linéaire

Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les vecteurs $u = (1, 2, -3)$ et $v = (1, -1, 1)$. On note P l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires possibles de u et v, soit :

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels qu'il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R} \text{ avec } \lambda u + \mu v = (x, y, z)\}$$

1. Montrer que $(1, 1, 1) \notin P$ mais que $(5, 1, -3) \in P$. Ainsi pour que (x, y, z) appartienne à P, il faut que x, y, z remplissent une certaine condition.

2. Soit (x, y, z) fixé dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que $(x, y, z) \in P$ si et seulement si le système suivant est compatible

$$(S)\begin{cases} \lambda + \mu & = x \\ 2\lambda - \mu & = y \\ -3\lambda + \mu & = z \end{cases}$$

3. Résoudre le système (S) ci-dessus (pour n'importe quel choix de (x, y, z)). En déduire que l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de u et v est l'ensemble d'équation $x + 4y + 3z = 0$. Quelle est la nature géométrique de P ?

4. **a.** Vérifier que le vecteur $n = (1, 4, 3)$ est normal simultanément à u et à v.

b. Quand on a deux vecteurs quelconques $w = (a, b, c)$ et $w' = (a', b', c')$ de $\mathbb{R}^3$ on définit le *produit vectoriel de w avec w'* par la formule $w \wedge w' = (bc' - b'c, -(ac' - a'c), ab' - b'c)$. Comparer $u \wedge v$ avec n.

c. Avec les notations de la question précédente vérifier que $w \wedge w'$ est toujours normal simultanément à w et à w'. En déduire une méthode pour trouver une équation cartésienne d'un plan de $\mathbb{R}^3$ défini par une équation paramétrique de la forme $P = \{A + \lambda w + \mu w'\}$ ($A \in \mathbb{R}^3$ un point donné, w, w' deux vecteurs donnés non parallèles).

Exercice 1.8 – Fractions rationnelles

Montrer qu'il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ unique tel que pour tout réel x différent de ± 1, on a : $\dfrac{x+2}{x^4-1} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{cx+d}{x^2+1}$. En déduire le calcul de $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{x+2}{x^4-1}dx$.

Exercice 1.9 – Systèmes à paramètres Soit $m \in \mathbb{R}$ un paramètre. En discutant suivant les valeurs de m, résoudre :

$$(S_1)\begin{cases} x + my & = 0 \\ mx + y & = 0 \end{cases}, (S_2)\begin{cases} x + my + m^2 z & = 1 \\ 2x + y + 5z & = 5 \\ x - y + z & = 2 \end{cases}, (S_3)\begin{cases} -mx + y + z & = -2 \\ x - my + z & = 1 \\ x + y - mz & = 1 \end{cases}$$

Exercice 1.10 – Soit $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ des paramètres réels. En discutant suivant les valeurs de a, b, c, résoudre le système :

$$(S)\begin{cases} x + ay + a^2 z & = \alpha \\ x + by + b^2 z & = \beta \\ x + cy + c^2 z & = \gamma \end{cases}$$