Feuille d'exercices 2

Suites génératrices. Sous-espaces vectoriels. Suites libres. Bases. Coordonnées.

Exercice 2.1 – Montrer que les suites ci-dessous engendrent $\mathbb{R}^2$:

$$\big((1,0),(2,3),(0,1)\big);\big((1,0),(2,3)\big);\big((2,3),(4,5)\big).$$

Exercice 2.2 – Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les cinq vecteurs suivants :

$$u_1=(2,-1,4),u_2=(-1,2,1),u_3=(-1,1,-1),u_4=(1,1,1)$$

1. Montrer que $\big(u_1,u_2,u_3,u_4\big)$ engendre $\mathbb{R}^3$. Déterminez toutes les sous-suites de $\big(u_1,u_2,u_3,u_4\big)$ qui engendrent $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $E=\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$. Déterminez toutes les sous-suites de $\big(u_1,u_2,u_3\big)$ qui engendrent E.

Exercice 2.3 – Peut-on écrire $(1,0,0)$ comme combinaison linéaire de $u_1=(1,2,3),u_2=(3,2,1),u_3=(1,1,1)$? La suite $\big(u_1,u_2,u_3\big)$ engendre t-elle $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2.4 – Soit (S) l'équation linéaire $x+y-2z=0$ et soit E l'ensemble des solutions de (S). Soit $u_1=(1,1,1),u_2=(4,2,3),u_3=(10,4,7)$.

1. Montrer que u_1,u_2,u_3 vérifient l'équation (S).

2. En déduire que $\big(u_1,u_2,u_3\big)$ n'engendre pas $\mathbb{R}^3$.

3. Montrer que $\big(u_1,u_2,u_3\big)$ engendre l'espace vectoriel des solutions de (E).

4. On pose $u_4=(1,1,-2)$. Montrer que pour tout vecteur $u=(x,y,z)$ on peut trouver un réel λ tel que $u-\lambda u_4\in E$. En déduire que $\big(u_1,u_2,u_4\big)$ engendre $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2.5 – Dans le plan $\mathbb{R}^2$ on considère la droite D d'équation $x+y=1$. Montrer que deux vecteurs distincts u,u' choisis sur la droite D forment une partie génératrice du plan $\mathbb{R}^2$ (!).

Exercice 2.6 – Dans $\mathbb{R}^4$ on note (comme souvent) x,y,z,t les composantes des vecteurs. On considère d'une part l'ensemble E des solutions du système linéaire homogène

$$(S)\ \begin{cases} 2x+3y-z+2t &=0\\ x-2y+z-t &=0\\ 3x+8y-3z+5t &=0\end{cases}$$

et d'autre part le sous-espace vectoriel $F=\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$, avec $u_1=(2,3,3,1)$, $u_2=(3,5,1,-4)$, $u_3=(1,1,1,1)$.

1. Déterminer une base de solutions de (S)

2. L'un des vecteurs u_i est-il dans E ? Montrer que pourtant E est contenu dans F.

3. Compléter la base de E trouvée à la première question en une partie génératrice de F ayant trois éléments.

Exercice 2.7 – Parmi les parties suivantes dire celles qui sont ou ne sont pas des sous-espaces vectoriels de l'espace ambiant :

$$E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = x^2\}, E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 0\}, E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 1\}$$

$$E_4 = \{\text{suites réelles } (u_n)_{n\geq 0} \text{ telles que } u_0 + u_1 + u_2 = 0 \text{ et pour tout } n \text{ on a } u_{2n} = 2u_n\}$$

Exercice 2.8 – Espaces vectoriels de fonctions.

1. Montrer que l'ensemble E des fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que $\int_0^1 f(x)dx = 0$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de toutes les fonctions $[0,1] \to \mathbb{R}$.

2. Montrer qu'il existe des polynômes de tout degré dans E. En déduire que E n'admet pas de partie génératrice finie.

Exercice 2.9 – Suites libres

1. Montrer que $\big((4,0,0),(1,-7,0),(3,5,-2)\big)$ est une suite libre de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

2. Montrer que $\big((4,-1,-1),(3,6,-1),(3,4,-3)\big)$ est une suite libre de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

3. Malgré les nombres effacés, montrer que $\big((4,?,?,-1,-1),(3,?,?,6,-1),(3,?,?,4,-3)\big)$ est une suite libre de vecteurs de $\mathbb{R}^5$.

Exercice 2.10 –

1. Donner une base (u_1,u_2) du plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation $x - 2y + 3z = 0$.

2. Soit $u_3 = (a,b,c)$ un vecteur tel que $a, c > 0$ et $b < 0$. Montrer que $\big(u_1,u_2,u_3\big)$ est libre.

Exercice 2.11 – Suite liée

1. Montrer que la suite $\big((3,-1,-2),(4,-6,2),(-3,2,1)\big)$ est liée dans $\mathbb{R}^3$. (On donnera une combinaison linéaire nulle de ces vecteurs dont les coefficients ne sont pas tous nuls.)

2. Montrer que la suite $\big((3,4,-5,-2),(-1,2,-2,1),(4,3,-9,2),(-3,-2,4,1)\big)$ est liée dans $\mathbb{R}^4$.

3. On considère les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = 1$, $g(x) = \cos^2(x)$, $h(x) = \sin^2(x)$. Montrer que la suite $\big(f,g,h\big)$ est liée.

Exercice 2.12 – Droite vectorielle du plan $\mathbb{R}^2$

Soit $u = (-2,3)$. Donner une équation paramétrique de l'ensemble D des vecteurs $v = (x,y)$ tels que (u,v) est liée. Donner une équation linéaire en (x,y) dont cette droite D soit l'ensemble des solutions.

Exercice 2.13 – Montrer que $\big((1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et calculer les coordonnées de $(3,-1,4,-5)$ dans cette base.

Exercice 2.14 – Base extraite Dans $\mathbb{R}^4$ on donne les vecteurs

$$u_1 = (1,2,0,3), u_2 = (2,4,0,6), u_3 = (1,-1,1,-1), u_4 = (4,5,1,8)$$

et on considère le sous-espace $E = \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4)$. Extraire de $\big(u_1,u_2,u_3,u_4\big)$ une base de E.

Exercice 2.15 – **Base de l'espace des solutions** Donner une base de l'espace des solutions du système linéaire homogène suivant :

$$\begin{cases} 3x - 7y + 4z + 11t & = 0 \\ x + y - 2z - 3t & = 0 \\ 2x - 3y + z + 4t & = 0 \end{cases}$$

Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2.16 – **Suites périodiques**

Soit E l'espace vectoriel de toutes les suites numériques réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit F l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ telles que pour tout $n \geq 0$ on a $u_{n+4} = u_n$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel et en donner une base à 4 éléments.

Exercice 2.17 – **Coordonnées**

1. Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0\}$.

a. Déterminer une base $\big(u_1, u_2, u_3\big)$ de E.

b. Montrer que $u = (1, -3, 3, -1) \in E$ et donner les coordonnées de u dans la base $\big(u_1, u_2, u_3\big)$.

2. Soit E l'ensemble des fonctions polynômiales $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ de degré ≤ 3 et qui s'annulent en $x = 1$.

a. Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions polynômiales réelles.

b. Montrer que $\big(f(x) = x - 1, g(x) = (x - 1)^2, h(x) = (x - 1)^3\big)$ est une base de E.

c. Montrer que $u(x) = x^3 - 1 \in E$ et donner les coordonnées de u dans la base $\big(f, g, h\big)$.

d. Pour $P(x) \in E$ exprimer les coordonnées de $P(x)$ dans la base $\big(f, g, h\big)$ en fonction des dérivées $P'(1), P''(1), P'''(1)$ (*formule de Taylor exacte*).

Exercice 2.18 – **Suites de Fibonacci** Soit F l'espace des suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$ telles que pour tout $n \geq 0$ on a la relation $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (une telle suite est dite *de Fibonacci*).

1. Montrer que F est un sous-espaces vectoriel de l'espace de toutes les suites réelles.

2. Montrer que F contient un unique élément $v = (v_n)_{n\geq 0}$ tel que $v_0 = 1$ et $v_1 = 0$. Montrer de même que F contient un unique élément $w = (w_n)_{n\geq 0}$ tel que $w_0 = 0$ et $w_1 = 1$.

3. Montrer que $\big(v, w\big)$ est une base de F. Comment trouve t-on les coordonnées d'une suite de Fibonacci $(u_n)_{n\geq 0}$?

4. Résoudre l'équation $x^2 = x + 1$. En déduire que F contient exactement deux suites géométriques s et t de raisons non nulles (on notera s la suite de raison > 0).

5. Montrer que $\big(s, t\big)$ est une autre base de F. On pose $\omega = v + w$. Calculer les 10 premiers termes de ω. Quelles sont les coordonnées de ω sur la base $\big(s, t\big)$? En déduire la limite du quotient $\frac{\omega_{n+1}}{\omega_n}$.