Université de Paris XI **Math 103**
L1 – 2ème semestre 2012-13 **Algèbre linéaire**

Feuille d'exercices 3

Equations cartésiennes. Dimension. Manipulations sur les sous-espaces.

Exercice 3.1 – Systèmes d'équations cartésiennes dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$: piqûre de rappel.

(a) Donner un système d'équation cartésienne de la droite du plan $\mathbb{R}^2$ engendrée par $u = (1, 2)$.

Plus généralement, soit $u = (a, b)$ un vecteur non nul du plan $\mathbb{R}^2$. Donner un système d'équation cartésienne de la droite $\mathrm{Vect}(u)$. (On pourra deviner une équation non nulle satisfaite par les composantes de u, puis vérifier que cette équation définit bien la droite $\mathrm{Vect}(u)$.)

(b) Donner un système d'équation cartésienne du plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\{(1, 0, 2), (-1, 2, 0)\}$.

(c) Donner un système d'équations cartésiennes de la droite de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(1, 2, -1)$. (Comme en (a), on pourra deviner deux équations différentes satisfaites par les composantes de u, puis vérifier que ce système d'équations définit bien la droite $\mathrm{Vect}(u)$.)

Exercice 3.2 – Base incomplète et système d'équations cartésiennes.

Soit $u_1 = (1, 1, 1, 2), u_2 = (0, 1, 2, -1), u_3 = (1, 3, 5, 0)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$, et soit $E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.

(a) Donner une base $\mathcal{B}$ de E et la dimension de E. Si $u \notin E$ est-il possible de compléter $\mathcal{B}$ en une base de $\mathbb{R}^4$ dont le troisième vecteur est u ? Donner un exemple de vecteurs u, v non dans E, tels que (u, v) est libre mais $(\mathcal{B}, u, v)$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^4$.

(b) En utilisant des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$, compléter $\mathcal{B}$ en une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^4$. Si on note (y_1, y_2, y_3, y_4) les coordonnées d'un vecteur u dans la base $\mathcal{B}'$, montrer que $u \in E \iff y_3 = y_4 = 0$.

(c) Déterminer les coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$. En déduire un *système d'équations cartésiennes de* E dans les coordonnées canoniques (i.e. un système linéaire (S) à 4 inconnues, tel qu'un vecteur $u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ appartient à E si et seulement si (x_1, x_2, x_3, x_4) est solution de (S)).

Exercice 3.3 – Equations de compatibilité et systèmes d'équations cartésiennes.

Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs

$$v = (1, 2, -3, 1), w = (1, -1, 1, -3)$$

et on pose $E = \mathrm{Vect}(v, w)$.

(a) Vérifier que (v, w) est une base de E.

(b) Montrer qu'un vecteur $u = (x, y, z, t)$ de $\mathbb{R}^4$ est dans E si et seulement si un certain système linéaire (Σ_u) est compatible (on explicitera le système (Σ_u) ; on remarquera en particulier que seul le deuxième membre dépend du vecteur u).

(c) Montrer que le système (Σ_u) est compatible si et seulement si (x, y, z, t) est solution d'un certain système linéaire homogène (S) (les équation de ce système (S) sont appelées les *équations de compatibilité du système* (Σ_u)).

(d) Donner un système d'équations cartésiennes de E.

Exercice 3.4 – Equations linéaires vérifiées par des vecteurs donnés.

Soit $u_1 = (1, 2, -1, 3), u_2 = (1, 1, 1, -2)$ et soit $E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$. On note alors F l'ensemble des éléments $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que l'équation linéaire $ax + by + cz + dt = 0$ aux quatre inconnues x, y, z, t est vérifiée par u_1 et par u_2.

(a) Montrer que F est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à deux équations, aux inconnues (a, b, c, d) (on explicitera ce système).

(b) Montrer que F est un plan de $\mathbb{R}^4$ et donner une base de F de la forme $(f_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1), f_2 = (a_2, b_2,c_2, d_2))$.

(c) Montrer que (S) $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1t &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2t &= 0 \end{cases}$ est un système d'équations cartésiennes de E.

(d) Par une méthode analogue à celle employée ci-dessus trouver une équation cartésienne de $E' = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ avec $u_3 = (2, -1, 01)$.

Exercice 3.5 – Systèmes d'équations cartésiennes dans $\mathbb{R}^4$.

Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs

$$u_1 = (1, -2, 1, -2), u_2 = (1, 1, 2, 2), u_3 = (2, -1, 3, 0), u_4 = (0, 3, 1, 4).$$

(a) Déterminer le rang de la suite (u_1, u_2, u_3, u_4) puis un système d'équations cartésiennes du sous-espace $E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

(b) Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } (x, y, z, t) \in E \text{ et } x + 2y - z - t = 0, x - y - z + t = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel, et en donner deux systèmes d'équations cartésiennes : un contenant 4 équations linéaires, un autre contenant 3 équations linéaires.

Exercice 3.6 – Soit $E \subset \mathbb{R}^5$ un sous-espace vectoriel.

(a) Quelles sont les valeurs possibles pour $\dim(E)$?

(b) Dans cette question on suppose que E est engendré par une suite (u_1, u_2, u_3). Montrer que toute suite de 4 vecteurs de E est liée.

(c) Dans cette question on suppose que E contient une suite libre (v_1, v_2, v_3). Montrer qu'aucune partie de E à 2 éléments n'est génératrice.

Exercice 3.7 – Soient E, F, G, H des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$. On suppose que $E \subset F \subset G \subset H$, et de plus $E \neq \{0\}, H \neq \mathbb{R}^4$. Montrer que deux des sous-espaces sont égaux.

Exercice 3.8 – Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ y + z + t = 0\}$ et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y = 0 \text{ et } z = 2t\}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.

(a) Déterminer la dimension et une base de E et F.

(b) Trouver la dimension et une base de $E \cap F$.

(c) Que peut-on dire de $E + F$? La somme est-elle directe ?

Exercice 3.9 – Base d'une intersection et d'une somme par l'algorithme du rang.

Pour $i, j = 1, 2, 3$ distincts quelconques et E_i, E_j deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ dans la liste ci-dessous :

$E_1 = \mathrm{Vect}(1, 0, 1, 0), (5, -1, 6, 0))$;

$E_2 = \mathrm{Vect}((0, 3, 4, 4), (-1, 1, 2, 4))$;

$E_3 = \mathrm{Vect}((1, 1, 2, 0), (1, 2, 2, 0), (3, 1, 6, 0))$;

donner une base de $E_i + E_j$, puis une base de $E_i \cap E_j$ et enfin dire si la somme de E_i et E_j est directe.

Exercice 3.10 –
On considère le sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^4$ défini par $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ 2x - 2y - z + t = 0\}$.
(a) Déterminer la dimension de E et une base de E.
(b) Déterminer un supplémentaire de E.

Exercice 3.11 – Considérons les vecteurs suivant de $\mathbb{R}^5$:

$$u_1 = (3, 2, 3, -1, 2), u_2 = (1, 2, 1, -1, -2), u_3 = (1, -6, 1, 3, 14),$$

$$v_1 = (3, 4, 3, -2, -2), v_2 = (-2, -3, -3, 1, 2), v_3 = (2, 1, -3, -3, 2).$$

Soient $E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ et $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$.
(a) Trouver une base et la dimension de E.
(b) Même question pour F.
(c) Déterminer la dimension et une base de $E \cap F$.
(d) E et F sont-ils en somme directe ? En déduire la dimension de $E + F$.
(e) Donner une base de $E + F$.
(f) Donner un supplémentaire (dans $\mathbb{R}^5$) de E, F et $E + F$.

Exercice 3.12 – Dans l'exercice **3.4** montrer que les sous-espaces vectoriels E et F de la question (c) sont supplémentaires.

Exercice 3.13 – Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs

$$v_1 = (1, -1, 2, 0), v_2 = (0, 2, 1, 1), v_3 = (1, 1, 3, 1), v_4 = (2, 0, 5, 1).$$

(a) La suite (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle libre ?
(b) Soit $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$. Déterminer la dimension de F et une base de F. En déduire le rang de la suite (v_1, v_2, v_3, v_4).
(c) Donner un système d'équations caractérisant F.
(d) Trouver un supplémentaire de F.

Exercice 3.14 –
(1) Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$, montrer qu'une famille finie de fonctions polynomiales ayant des degrés différents est libre. (On pourra commencer par regarder le cas d'une famille explicite comportant peu de vecteurs).
(2) Soit d un entier naturel et soit $a \in \mathbb{R}$. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_d[X]$ des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$ de degré inférieur à d, montrer que la famille $(m_0, \ldots, m_d)$ de fonctions définies par $m_0(x) = 1$, $m_1(x) = x - a, \ldots, m_d(x) = (x - a)^d$ est une base.
(3) En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que les coordonnées de $f \in \mathbb{R}_d[X]$ sur cette base sont $(f(a), f'(a), \ldots, \frac{f^{(d)}(a)}{d!})$.
(4) Supposons $d = 4$. On considère l'ensemble F des fonctions dans $\mathbb{R}_d[X]$ vérifiant $f(a) = f'(a) = f''(a) = 0$. Montrer que F est un s.e.v de $\mathbb{R}_d[X]$ et en donner sa dimension et une base.
(5) Donner un supplémentaire de F.

Exercice 3.15 – **Polynômes de Tchebychev**

On définit, pour n, un entier naturel, pour $\theta \in [0, \pi]$,

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$$

(1) Vérifier que cette formule définit une fonction polynomiale T_n sur $[-1, +1]$ de degré n. Autrement dit, exprimer $\cos n\theta$ comme une fonction polynomiale de $\cos\theta$. Expliciter T_0, T_1, T_2 et T_3

(2) Soit d un entier naturel. Montrer que $T_0, \dots, T_d$ est une base de $\mathbb{R}_d[X]$.

(3) Calculer $\int_0^\pi T_n(\cos\theta).T_m(\cos\theta)d\theta$. En déduire, pour une fonction polynomiale f de degré $\leq d$, une expression des coordonnées de f sur la base $(T_0, \dots, T_d)$ faisant intervenir des intégrales.

Exercice 3.16 –

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_5[X]$ des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$ de degré inférieur à 5.

(1) Montrer que

$$F := \{(x^2 + x + 1)Q(x), Q \in \mathbb{R}_3[X]\}$$

est un s.e.v de $\mathbb{R}_5[X]$. En donner une base.

(2) Montrer que F et $\mathbb{R}_2[X]$ sont supplémentaires.

(3) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_5[X]$, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}_3[X] \times \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(x) = (x^2 + x + 1)Q(x) + R(x)$.

Exercice 3.17 – **Polynomes s'annulant en un ou plusieurs points.** Dans cet exercice on travaille dans l'espace vectoriel E des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré ≤ 3. Pour tout réel r on note E_r l'ensemble des polynômes $P(x) \in E$ tels que $P(r) = 0$.

Soient a, b, c, d quatre réels deux à deux distincts. On introduit les sous-espaces vectoriels $E_{ab} := E_a \cap E_b$ et $E_{cd} := E_c \cap E_d$.

1. Soit $r \in \mathbb{R}$ fixé.

a. Montrer que E_r est un sous-espace vectoriel de E.

b. Montrer que E_r et la droite C de E formée des polynômes constants sont supplémentaires. Quelle est la dimension de E ?

c. Montrer que $\big((x-r), (x-r)^2, (x-r)^3\big)$ est une base de E_r. Montrer que E_r est l'ensemble des polynômes $P(x)$ de degré ≤ 3 qui sont divisibles par $x - r$, c'est à dire de la forme $P(x) = (x-r)Q(x)$ pour un certain polynôme $Q(x)$ de degré ≤ 2.

2. **a.** Montrer que $E_b \not\subset E_a$. En déduire que E_{ab} est un plan.

b. Montrer que si $P(x) = (x-a)(x-b)Q(x)$ et $Q(x)$ est de degré ≤ 1, alors $P(x) \in E_{ab}$. Montrer alors la réciproque.

3. **a.** Montrer que $E_{ab} \cap E_{cd} = \{0_E\}$, en déduire que E_{ab} et E_{cd} sont supplémentaires.

b. Montrer que $E_{ab} \cap E_c \neq \{0_E\}$, que $E_c + E_{ab} = E$ et en déduire que $E_c \cap E_{ab}$ est une droite. Montrer que $(x-a)(x-b)(x-c)$ est un vecteur directeur de cette droite.

c. Montrer que $\big((x-a)(x-b)(x-c), (x-a)(x-b)(x-d), (x-a)(x-c)(x-d), (x-b)(x-c)(x-d)\big)$ est une base de E. Calculer les coordonnées de $P(x) \in E$ dans cette base en fonction de $P(a), P(b), P(c), P(d)$.