Feuille Bonux 1

Systèmes, Espaces engendrés

29 janvier 2013

Exercice 1 :

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u_1 = (1, 1, 3)$, $u_2 = (1, -1, -1)$, $v_1 = (1, 0, 1)$ et $v_2 = (2, -1, 0)$. Montrer que $\mathrm{Vect}\ (u_1, u_2) = \mathrm{Vect}\ (v_1, v_2)$.

Exercice 2 :

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs : $e_1 = (0, 1, -2, 1)$, $e_2 = (1, 0, 2, -1)$, $e_3 = (3, 2, 2, -1)$, $e_4 = (0, 0, 1, 0)$ et $e_5 = (0, 0, 0, 1)$. Dire si les assertions suivantes (et justifier) son fraies ou fausses :

- $\mathrm{Vect}\ (e_1, e_2, e_3) = \mathrm{Vect}\ ((1, 1, 0, 0), (-1, 1, -4, 2))$.
- $(1, 1, 0, 0) \in \mathrm{Vect}\ (e_1, e_2) \cap \mathrm{Vect}\ (e_2, e_3, e_4)$.

Exercice 3 :

On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $e_1 = (1, 2, 3, 4)$, $e_2 = (1, 1, 1, 3)$, $e_3 = (2, 1, 1, 1)$, $e_4 = (-1, 0, -1, 2)$ et $e_5 = (2, 3, 0, 1)$. On note $E = \mathrm{Vect}\ (e_1, e_2, e_3)$ et $F = \mathrm{Vect}\ (e_4, e_5)$. Déterminer $E \cap F$ et $E + F$ (où $E + F = \{a + b, a \in E, b \in F\}$).

Exercice 4 :

Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0\}$ et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = z + t\}$. Trouver des vecteurs qui engendrent E et F. Puis trouver des équations qui définissent $E \cap F$ et $E + F$ et trouver également des vecteurs qui engendrent ces espaces.

Exercice 5 :

Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $\vec{e_1}(1, 2, 3, 4)$ et $\vec{e_2}(1, -2, 3, -4)$. Peut-on déterminer x et y pour que $(x, 1, y, 1) \in Vect\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$? Et pour que $(x, 1, 1, y) \in Vect\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$?

Exercice 6 : Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, on se donne cinq vecteurs : $V_1 = (1, 1, 1, 1)$, $V_2 = (1, 2, 3, 4)$, $V_3 = (3, 1, 4, 2)$, $V_4 = (10, 4, 13, 7)$, $V_5 = (1, 7, 8, 14)$. À quelle(s) condition(s) un vecteur $B=(b_1,b_2,b_3,b_4)$ appartient-il au sous-espace engendré par les vecteurs V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 ? Définir ce sous-espace par une ou des équations.

Exercice 7 : Dans $\mathbb{R}^4$, comparer les sous-espaces F et G suivants :

$$\begin{aligned} F &= \text{Vect}\{(1,0,1,1),(-1,-2,3,-1),(-5,-3,1,-5)\} \\ G &= \text{Vect}\{(-1,-1,1,-1),(4,1,2,4)\} \end{aligned}$$

Exercice 8 : Soient E et F les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ engendrés respectivement par les vecteurs $\left\{\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}\right\}$ et $\left\{\begin{pmatrix}3\\7\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\0\\-7\end{pmatrix}\right\}$. Montrer que E et F sont égaux.

Exercice 9 : Prouver que dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $u_1=(2,3,-1)$ et $u_2=(1,-1,-2)$ engendrent le même s.e.v. que les vecteurs $v_1=(3,7,0)$ et $v_2=(5,0,-7)$.

Exercice 10 : Peut-on déterminer des réels x,y pour que le vecteur $v=(-2,x,y,3)$ appartienne au s.e.v. engendré dans $\mathbb{R}^4$ par le système (e_1,e_2) où $e_1=(1,-1,1,2)$ et $e_2=(-1,2,3,1)$?

Exercice 11 : Résoudre les systèmes suivants

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} 3x & -\ y & +2z & = & a \\ -x & +2y & -3z & = & b \\ x & +2y & +\ z & = & c \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & +2z & = & 5 \\ x & -y & -\ z & = & 1 \\ x & & +\ z & = & 3 \end{array}\right.$$

Exercice 12 : Sans chercher à résoudre les systémes suivants, discuter la nature de leurs ensembles de solution :

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & -z & = & 0 \\ x & -y & & = & 0 \\ x & +y & +z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrcl} x & +3y & +2z & = & 1 \\ 2x & -2y & & = & 2 \\ x & +\ y & +\ z & = & 2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrcl} x & +3y & +2z & = & 1 \\ 2x & -2y & & = & 2 \\ x & +\ y & +\ z & = & 3 \end{array}\right.$$

Exercice 13 : Résoudre, suivant les valeurs de m :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} x+(m+1)y & = & m+2 \\ mx+(m+4)y & = & 3 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcl} mx+(m-1)y & = & m+2 \\ (m+1)x-my & = & 5m+3 \end{array}\right.$$

Exercice 14 : Écrire les conditions, portant sur les réels a, b, c, pour que les systèmes suivants admettent des solutions non nulles ; expliciter ces solutions.

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ (b+c)x+(c+a)y+(a+b)z & = & 0 \\ bcx+acy+abz & = & 0 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcl} x-a(y+z) & = & 0 \\ y-b(x+z) & = & 0 \\ z-c(x+y) & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 15 : Résoudre et discuter suivant les valeurs de b_1, b_2, b_3 et b_4 :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} x+3y+4z+7t &=& b_1 \\ x+3y+4z+5t &=& b_2 \\ x+3y+3z+2t &=& b_3 \\ x+y+z+t &=& b_4 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcl} x+3y+5z+3t &=& b_1 \\ x+4y+7z+3t &=& b_2 \\ y+2z &=& b_3 \\ x+2y+3z+2t &=& b_4 \end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z-t &=& b_1 \\ -x+3y+t &=& b_2 \\ 2x-2y+2z-2t &=& b_3 \\ 2y+z &=& b_4 \end{array}\right. \qquad (S_4)\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+z+2t &=& b_1 \\ -2x-4y-2z-4t &=& b_2 \\ -x-2y-z-2t &=& b_3 \\ 3x+6y+3z+6t &=& b_4 \end{array}\right.$$

Exercice 16 : Discuter et résoudre suivant les valeurs des réels λ et a :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} 3x+2y-z+t &=& \lambda \\ 2x+y-z &=& \lambda-1 \\ 5x+4y-2z &=& 2\lambda \\ (\lambda+2)x+(\lambda+2)y-z &=& 3\lambda+a \\ 3x-z+3t &=& -\lambda^2 \end{array}\right.$$

Exercice 17 : Résoudre les systèmes suivants.

1. $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+z &=& 3 \\ 3x-y-2z &=& 0 \\ x+y-z &=& -2 \\ x+2y+z &=& 1 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t &=& 1 \\ x-y+2z-3t &=& 2 \\ 2x+4z+4t &=& 3 \\ 2x+2y+3z+8t &=& 2 \\ 5x+3y+9z+19t &=& 6 \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+z+t &=& 1 \\ x+2y+3z+4t &=& 2 \\ 3x-y-3z+2t &=& 5 \\ 5y+9z-t &=& -6 \end{array}\right.$

4. $\left\{\begin{array}{rcl} x-y+z+t &=& 5 \\ 2x+3y+4z+5t &=& 8 \\ 3x+y-z+t &=& 7 \end{array}\right.$

5. $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z &=& 0 \\ 2x+3y-z &=& 0 \\ 3x+y+2z &=& 0 \end{array}\right.$

Exercice 18 : Résoudre et discuter le système linéaire suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2+3x_3+10x_4+x_5 & = & b_1 \\ x_1+2x_2+x_3+4x_4+7x_5 & = & b_2 \\ x_1+3x_2+4x_3+13x_4+8x_5 & = & b_3 \\ x_1+4x_2+2x_3+7x_4+14x_5 & = & b_4 \end{array}\right.$$

Exercice 19 : Résoudre $\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=d \\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2 \end{cases}$.

Exercice 20 : Résoudre $\begin{cases} -cy+bz=\alpha \\ cx-az=\beta \\ -bx+ay=\gamma \end{cases}$.