Feuille Bonux 2

Sous-Espaces Vectoriels

6 février 2013

Exercice 1 :

Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont-ils des sous-$\mathbb{R}$-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$? Justifier. Dans le cas des sous-ev, donner des vecteurs générateurs.

$$\begin{array}{ll} A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x=0\} & B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, y=0\} \\ C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x=1\} & D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x=y\} \\ E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, y=x^2\} & F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, 2013x+10^9y=0\} \\ G=\{(8x-y, 2y+\pi x), x,y\in\mathbb{R}^2\} & H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x\geq y\} \end{array}$$

Exercice 2 :

On considère les trois sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$\begin{aligned} E&=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, 2x+4y+5z=0\}, \\ F&=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, 3x+7y+11z=0\}, \\ G&=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x+6z=0\} \end{aligned}$$

Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$, lesquels sont des sous-espaces vectoriels ? Pour ceux là, donner des vecteurs générateurs.

$$E,\ F,\ G,\ E\cap F,\ F\cap G,\ E\cap G,\ E\cap G\cap H,\ E\cup G,\ E\cup F,\ E\cup(F\cap G)$$

Exercice 3 :

Soit $\mathcal{E}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues d'une variable réelle et à valeurs réelles ($\mathcal{E}=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f \text{ continue}\}$). Dire si les ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des sev de $\mathcal{E}$ ou non.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}&=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f \text{ est dérivable}\} \\ \mathcal{B}&=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f \text{ est paire}\} \end{aligned}$$

Exercice 4 :

Montrer que l'ensemble de suites réelles :

$$\mathcal{U} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$$

est un $\mathbb{R}$-ev.

Exercice 5 :

Soit E un espace vectoriel de F un sev de E. Le complémentaire de F dans E est-il un sev ?

Exercice 6 :

Soient F_1 et F_2 deux sev d'un ev E. Montrer que $F_1 \cup F_2$ est un sev de E si et seulement si $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$.

Exercice 7 :

Soit A un polynôme non nul à coefficients réels et F l'ensemble des polynômes à coefficients réels qui sont multiples de A, *i.e.* :

$$F = \{P \in \mathbb{R}[X], \exists Q \in \mathbb{R}[X], P = AQ\}.$$

Montrer que F est un sous-ev du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}[X]$. Montrer également que $\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X], \deg(P) \leq n\}$ est un $\mathbb{R}$-ev. Donner une famille génératrice.

Exercice 8 :

Parmi les espaces suivants, reconnaître ceux qui sont des ev :

$$\begin{aligned}
E &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y+a=0, x+3az=0\}\\
F &= \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(0)=1\}\\
G &= \{f := \mathbb{R} \to \mathbb{R} f(1)=0\}\\
H &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2 - z^2 = 0\}\\
I &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, e^x e^y = 0\}\\
J &= \{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}), \exists a, \phi \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a\cos(x+\phi)\}
\end{aligned}$$