Université de Paris XI | **Math 103**
L1 – 2ème semestre 2012-13 | **Algèbre linéaire**

Contrôle des connaissances 1

Systèmes linéaires, suites génératrices, suites libres, bases
A effectuer entre le 18 février et le 22 Février 2013

Entre le 18 février et le 22 Février, au début d'un TD, l'enseignant vous soumettra trois affirmations, choisies dans la liste ci-dessous (on s'autorisera aussi de légères variantes). Vous disposerez alors de 15 minutes pour dire si chacune des trois affirmations soumises est VRAIE ou FAUSSE, et pour justifier vos réponses de la façon la plus convaincante possible. Le barème est : pour chacune des trois affirmations, 1 point pour la bonne réponse (VRAI ou FAUX), 6 points pour la justification.

1.— L'équation aux inconnues x, y, z : $7x - y - 5z = 1$ admet une infinité de solutions.

2.— Le système à 4 équations et 3 inconnues $\begin{cases} 2x + 3y + 4z &= 0 \\ 3x + 4y + 5z &= 0 \\ 4x + 5y + 6z &= 0 \\ 5x + 6y + 7z &= 0 \end{cases}$ est incompatible.

3.— Le système à 3 équations et 4 inconnues $\begin{cases} x + y - z - t &= 1 \\ x - y + z - t &= 1 \\ y - z &= 0 \end{cases}$ admet une infinité de solutions.

4.— L'ensemble E_0 des solutions du système linéaire suivant (S_0) $\begin{cases} x - 3y &= 0 \\ 3y - 6z &= 0 \\ x - 6z &= 0 \end{cases}$ est la droite $E_0 = \{(6z, 2z, z), z \in \mathbb{R}\}$.

5.— [suite...] L'ensemble E des solutions du système linéaire suivant (S) $\begin{cases} x - 3y &= 1 \\ 3y - 6z &= 1 \\ x - 6z &= 1 \end{cases}$ s'obtient en ajoutant une solution particulière de (S) à l'ensemble E_0 des solutions de la question précédente.

6.— [... et fin] Comme E_0 est infini on en déduit que E est infini.

7.— La suite $\big(u_1 = (3, 2, 1), u_2 = (4, 3, 2), u_3 = (10, 7, 4)\big)$ engendre $\mathbb{R}^3$.

8.— Dans l'espace vectoriel $\mathcal{P}_2$ des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 2, on considère $P(x) = x^2 + x$, $Q(x) = x + 1$ et $R(x) = x - 1$. Alors (P, Q, R) engendre $\mathcal{P}_2$.

9.— La suite de vecteurs $\big((1, 2, -1, -2), (1, 1, 3, -5), (1, -1, 1, -1), (3, 1, 3, -7)\big)$ est libre.

10.— La suite de fonctions numériques réelles $\left(u(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2, v(x) = \frac{1}{6}x^3, w(x) = \mathrm{e}^x\right)$ est liée.

11.— Soit $u_1 = (1,0,2,0), u_2 = (2,0,3,0)$. Soit $e_1 = (1,0,0,0), e_2 = (0,1,0,0), e_3 = (0,0,1,0), e_4 = (0,0,0,1)$. Alors (u_1, u_2, e_2, e_4) est une base.

12.— Soit $E = \mathrm{Vect}(f_1 = (2,5,1,3), f_2 = (1,2,1,1), f_3 = (1,1,2,0), f_4 = (2,3,3,2)) \subset \mathbb{R}^4$. Alors (f_1, f_2, f_4) est une base de E.

13.— On considère le système linéaire homogène (S) $\begin{cases} x + y + 2z - t & = 0 \\ 3x + 4y + 5z + t & = 0 \end{cases}$. Une base de l'espace des solutions est $(u_1 = (5,-4,0,1), u_2 = (-3,1,1,0))$. Le vecteur $u_3 = (2,-3,1,-1)$ n'est pas solution de (S) et la suite (u_1, u_2, u_3) est liée.

14.— On suppose que E est un espace vectoriel et que (v_1, v_2, v_3) est une base de E. On suppose que $u_1 = 3v_1 + 2v_2 - v_3, u_2 = v_1 + v_2 + v_3, u_3 = v_1 + v_2 + 2v_3$. Alors (u_1, u_2, u_3) est aussi une base de E et le vecteur $v = v_1 - v_2 - 10v_3$ a pour coordonnées $(2,-2,-3)$ dans la base (u_1, u_2, u_3).

15.— La suite $\big(P_1(x) = (x-2)(x-3), P_2(x) = (x-1)(x-3), P_3(x) = (x-1)(x-2)\big)$ forme une base de l'espace vectoriel $\mathcal{P}_2$ des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 2. Les coordonnées de $Q(x) \in \mathcal{P}_2$ dans cette base sont données par $(\dfrac{Q(1)}{6}, \dfrac{Q(2)}{3}, \dfrac{Q(3)}{2})$.