Université de Paris XI — **Math 103**

L1 – 2ème semestre 2012-13 — **Algèbre linéaire**

Contrôle des connaissances 2

Systèmes d'équations cartésiennes. Dimension. Opérations sur les sous-espaces.

A effectuer entre le 11 Mars et le 15 Mars 2013

Entre le 18 février et le 22 Février, au début d'un TD, l'enseignant vous soumettra trois affirmations, choisies dans la liste ci-dessous (on s'autorisera aussi de légères variantes). Vous disposerez alors de 15 minutes pour dire si chacune des trois affirmations soumises est VRAIE ou FAUSSE, et pour justifier vos réponses de la façon la plus convaincante possible. Le barème est : pour chacune des trois affirmations, 1 point pour la bonne réponse (VRAI ou FAUX), 6 points pour la justification.

1.— $(S_1)\ \begin{cases} x+2y-3z+t &= 0 \\ -2x+3y+2z-t &= 0 \end{cases}$, $(S_2)\ \begin{cases} 3x-y-z+2t &= 0 \\ x+2y-z+t &= 0 \end{cases}$, $(S)\ \begin{cases} x+2y-3z+t &= 0 \\ -2x+3y+2z-t &= 0 \\ 3x-y-z+2t &= 0 \end{cases}$.

Soit $E = \mathrm{Sol}(S_1)$ et $F = \mathrm{Sol}(S_2)$ alors $E \cap F = \mathrm{Sol}(S)$.

2.— Soit $E = \mathrm{Sol}(\begin{cases} x+y-z-t &= 0 \\ 2x-y+2z-t &= 0 \\ x-2y+3z &= 0 \end{cases})$ soit $u = (1,1,0,0), v = (0,1,1,2)$. Alors $u \notin E, v \notin E$ et donc la somme de E et $F = \mathrm{Vect}(u,v)$ est directe.

3.— Soit $E = \mathrm{Vect}((1,0,1,0,1),(1,-1,-1,-1,1),(1,1,3,1,1))$ et $F = \mathrm{Vect}((1,2,3,1,0),(1,0,-1,-1,0))$ alors $E+F$ est de dimension 3.

4.— Les trois vecteurs $u_1 = (1,2,3,4), u_2 = (4,3,2,1), u_3 = (-2,1,4,7)$ vérifient l'équation cartésienne $(S) : 3x-5y+z+t = 0$. Donc $E = \mathrm{Sol}(S)$ où l'on a posé $E = \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$.

5.— La droite $D = \mathrm{Vect}((1,2,1,-1))$ est en somme directe avec $E = \mathrm{Vect}((1,2,1-2),(1,-1,2,-1),(3,0,5,-4))$ donc D et E sont supplémentaires.

6.— Le rang de $\big((1,0,-1,1),(2,0,-2,2),(1,2,3,-1),(3,2,1,1)\big)$ est 2.

7.— Le sous-espace $\mathrm{Vect}((1,2,0,3),(0,2,3,1),(1,4,3,4),(3,4,3,4))$ est de dimension 3.

8.— L'espace des solutions du système $(S)\ \begin{cases} x+y+2z-t &= 0 \\ x+2y-z+2t &= 0 \\ 2x+y+7z-5t &= 0 \end{cases}$ est de dimension 1.

9.— Soit $u_1 = (1,2,3), u_2 = (2,3,4), u_3 = (4,5,5)$ et $E = \mathrm{Vect}(u_1,u_2)$. Alors (u_1,u_2,u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Donc les vecteurs de E sont caractérisés par la condition : la troisième coordonnée est nulle.

10.— La suite $(u_1 = (1,0,0,-1), u_2 = (1,1,0,2), u_3 = (0,1,2,3), u_4 = (-1,0,2,3))$ est libre donc il existe des réels $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ tels que $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3+\lambda_4u_4 = (0,1,0,-1)$.

11.— Les trois polynômes $P_0(x) = (x-1)(x-2), P_1(x) = x(x-2), P_2(x) = x(x-1)$ sont tous de degré exactement 2, donc la suite (P_0, P_1, P_2) est liée.

12.— La suite $(u_1 = (1,0,0,-1), u_2 = (1,1,0,2), u_3 = (0,1,2,3), u_4 = (-1,0,2,3))$ engendre $\mathbb{R}^4$, donc la seule solution de l'équation $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = (0,0,0,0)$ est la solution nulle.

13.— Soient $E = \mathrm{Vect}(u_1 = (3,1,0,2), u_2 = (0,2,3,1), u_3 = (1,1,1,1))$ et $F = \mathrm{Sol}(\begin{cases} x+y+z & = 0 \\ y+z+t & = 0 \\ 2x+y+z-t & = 0 \end{cases})$.
Alors $E \cap F = \{0\}$ et $E \oplus F = \mathbb{R}^4$.

14.— Soient $E = \mathrm{Vect}(u_1 = (1,-1,2,0,3), u_2 = (2,1,1,1,-1), u_3 = (-1,-2,1,-1,4))$ et $F = \mathrm{Vect}(v_1 = (0,1,-1,1,1), v_2 = (1,1,0,-3,0), v_3 = (1,-1,2,-5,-2))$. Alors $E \cap F = \{0\}$ et $E \oplus F = \mathbb{R}^5$.

15.— Soient $E = \mathrm{Vect}(u_1 = (1,0,2,-1), u_2 = (-1,3,1,1))$ et $F = \mathrm{Vect}(v_1 = (1,3,5,0), v_2 = (0,1,2,3))$. Alors $E + F = \mathbb{R}^4$ et donc E et F sont des plans suppléèmentaires.