Généralisations du critère d'indépendance linéaire de Nesterenko

Simon Dauguet

Université Paris-Sud

10 juin 2014

1. Introduction

2. Généralisations du critère de Nesterenko
   - Généralisations quantitatives
   - Reformulation

3. Application à $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}, \ \Re(s) > 1$$

Théorème :

$\forall k \in \mathbb{N}^*$

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1} 2^{2k-1} B_{2k} \pi^{2k}}{(2k)!} \in \mathbb{Q}\pi^{2k}.$$

Lindemann, 1882 : π est transcendant. D'où :

Théorème :

$\forall k \in \mathbb{N}^*$

$$\zeta(2k) \notin \mathbb{Q}$$

Et même

$$\zeta(2k) \text{ transcendant.}$$

Conjecture :

$$\zeta(2k+1) \notin \mathbb{Q}$$

Théorème (Apéry - 1978) :

$$\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$$

Définition :

Pour $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mu(\xi)$, *exposant d'irrationalité de* ξ, est la borne inférieure de l'ensemble des $\mu \in \mathbb{R}$ tels que l'inégalité

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^\mu}$$

soit vérifiée pour tous les entiers p et q dès que q est suffisamment grand par rapport à μ et ξ.

On a alors,

$$\mu(\xi) \geq 2$$

$$\xi \text{ nombre de Liouville} \iff \mu(\xi) = +\infty$$

Ex. : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$ Liouville

- Apéry (1978) $\rightsquigarrow \mu(\zeta(2)) < 11,851$
- Hata (1995) $\rightsquigarrow \mu(\zeta(2)) < 5,687$
- Rhin-Viola (1996) $\rightsquigarrow \mu(\zeta(2)) < 5,442$
- ...

Théorème (Zudilin - 2013) :

$$\mu(\zeta(2)) < 5,096\ldots$$

- Apéry (1978) $\rightsquigarrow \mu(\zeta(3)) < 13,418$
- Hata (2000) $\rightsquigarrow \mu(\zeta(3)) < 7,378$
- ...

Théorème (Rhin-Viola - 2001) :

$$\mu(\zeta(3)) < 5,514\ldots$$

Théorème (Rivoal, Ball-Rivoal - 2000) :

$\forall \varepsilon > 0$, $\forall n$ suffisamment grand par rapport à ε

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(1, \zeta(3), \zeta(5), \ldots, \zeta(2n+1)) \geq \frac{1-\varepsilon}{1+\log 2} \log n \, .$$

Théorème (Critère de Nesterenko - 1985) :

$\xi_1, \ldots, \xi_{p-1} \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$, $\beta > 1$, $(\ell_{i,n})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, telle que :

- $\lim_{n\to+\infty} |\ell_{1,n}\xi_1 + \cdots + \ell_{p-1,n}\xi_{p-1} + \ell_{p,n}|^{1/n} = \alpha$
- $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$, $\limsup_{n\to+\infty} |\ell_{i,n}|^{1/n} \leq \beta$

Alors

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(1, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1}) \geq 1 - \frac{\log \alpha}{\log \beta} \, .$$

Théorème (Rivoal - 2001) :

$$\exists j \in \{5, 7, 9, \dots, 21\} \text{ tel que } \zeta(j) \notin \mathbb{Q}\,.$$

Théorème (Krattenthaler-Rivoal - 2007) :

$$\exists j \in \{5, 7, 9, \dots, 19\} \text{ tel que } \zeta(j) \notin \mathbb{Q}\,.$$

Théorème (Zudilin - 2001) :

$$\exists j \in \{5, 7, 9, 11\} \text{ tel que } \zeta(j) \notin \mathbb{Q}\,.$$

Théorème (Ball-Rivoal - 2001) :

$\exists j \leq 169$ impair tel que $1, \zeta(3), \zeta(j)$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

- Zudilin (2002) : $169 \rightsquigarrow 145$ (groupe de permutations)
- Fischler-Zudilin (2010) : $145 \rightsquigarrow 139$ (critère avec diviseurs)

Théorème (Fischler-Zudilin - 2010) :

$\xi_0, \ldots, \xi_{p-1} \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_{p-1} \geq 0$. Soit $(Q_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que $Q_{n+1} = Q_n^{1+o(1)}$ et pour tout $n \geq 0$, et tout $0 \leq i \leq p-1$, soit $\delta_{i,n} \in \mathbb{N}^*$ et $\ell_{i,n} \in \delta_{i,n}\mathbb{Z}$ avec $\delta_{0,n} = 1$ tels que

- $\delta_{i,n} \big| \delta_{i+1,n}$ pour tout $n \geq 0$ et $0 \leq i \leq p-2$
- $\frac{\delta_{j,n}}{\delta_{i,n}} \Big| \frac{\delta_{j,n+1}}{\delta_{i,n+1}}$ pour tout $n \geq 0$ et $0 \leq i < j \leq p-1$
- $\delta_{i,n} = Q_n^{\gamma_i + o(1)}$ pour $1 \leq i \leq p-1$
- $\left| \sum_{i=0}^{p-1} \ell_{i,n} \xi_i \right| = Q_n^{-\tau + o(1)}$
- $\max_{0 \leq i \leq p-1} |\ell_{i,n}| \leq Q_n^{1+o(1)}$

Alors

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\xi_0, \ldots, \xi_{p-1}) \geq 1 + \tau + \gamma_1 + \cdots + \gamma_{p-1} .$$

Si pour tout $1 \leq i \leq p$, $\delta_{i,n} = 1 \rightsquigarrow$ Critère de Nesterenko.

Souvent : $\delta_{i,n} = \mathrm{ppcm}(1, 2, \ldots, n)^{e_i}$ avec $e_i \geq 0$.

Notations

Si $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante, on notera, pour $Q \geq Q_0$,

$$\Phi(Q) = \max\{k \in \mathbb{N}, Q_k \leq Q\}\,.$$

Alors

$$Q_{\Phi(Q)} \leq Q < Q_{\Phi(Q)+1}$$

Pour $\varepsilon > 0$, on notera "$Q \underset{\varepsilon}{\gg} 0$" pour "$Q$ assez grand par rapport à ε".

Théorème (Fischler - 2011) :

$\xi_1, \dots, \xi_{p-1} \in \mathbb{R}$, $\tau_1, \dots, \tau_{p-1} > 0$, 2 à 2 distincts, $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que $Q_{n+1} = Q_n^{1+o(1)}$ et $\gamma_1, \dots, \gamma_p \geq 0$.
Soient, $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\delta_{i,n} \in \mathbb{N}^*$ et $\ell_{i,n} \in \delta_{i,n}\mathbb{Z}$ tels que :

- $\delta_{i,n} \big| \delta_{i+1,n}$, $\forall n$, $1 \leq i \leq p-1$
- $\frac{\delta_{j,n}}{\delta_{i,n}} \Big| \frac{\delta_{j,n+1}}{\delta_{i,n+1}}$, $\forall n$, $0 \leq i < j \leq p$ et $\delta_{0,n} = 1$
- $\delta_{i,n} = Q_n^{\gamma_i + o(1)}$, $1 \leq i \leq p$
- $|\ell_{p,n}\xi_i - \ell_{i,n}| = Q_n^{-\tau_i + o(1)}$, $1 \leq i \leq p-1$
- $\max_{1\leq i\leq p} |\ell_{i,n}| \leq Q_n^{1+o(1)}$

Soient $\varepsilon > 0$, $Q \underset{\varepsilon}{\gg} 0$, $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{Q}^p \setminus \{\mathbf{0}\}$ tel que $\delta_{i,\Phi(Q)} a_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq p$ et $|a_i| \leq Q^{\tau_i - \varepsilon}$, $1 \leq i \leq p-1$. Alors

$$|a_1\xi_1 + \cdots + a_{p-1}\xi_{p-1} + a_p| > Q^{-1-\varepsilon}$$

et en particulier, $1, \xi_1, \dots, \xi_{p-1}$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants.

Théorème 1 :

$\xi_1, \ldots, \xi_{p-1} \in \mathbb{R}$, $\tau_1, \ldots, \tau_{p-1} > -1$, 2 à 2 distincts, $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que $Q_{n+1} = Q_n^{1+o(1)}$.
Soient, $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\delta_{i,n} \in \mathbb{N}^*$ et $\ell_{i,n} \in \delta_{i,n}\mathbb{Z}$ tels que :

- $\delta_{i,n} \big| \delta_{i,n+1}$, $\forall n$, $1 \le i \le p$
- $|\ell_{p,n}\xi_i - \ell_{i,n}| = Q_n^{-\tau_i + o(1)}$, $1 \le i \le p-1$
- $|\ell_{p,n}| = Q_n^{1+o(1)}$

Soient $\varepsilon > 0$, $Q \underset{\varepsilon}{\gg} 0$, $(a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{Q}^p \setminus \{\mathbf{0}\}$ tel que $\delta_{i,\Phi(Q)} a_i \in \mathbb{Z}$, $1 \le i \le p$ et $|a_i| \le Q^{\tau_i - \varepsilon}$, $1 \le i \le p-1$. Alors

$$|a_1\xi_1 + \cdots + a_{p-1}\xi_{p-1} + a_p| > Q^{-1-\varepsilon}$$

Théorème (Fischler - 2011) :

$\xi_1, \dots, \xi_{p-1} \in \mathbb{R}$, $\tau_1, \dots, \tau_{p-1} > 0$, 2 à 2 distincts, $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que $Q_{n+1} = Q_n^{1+o(1)}$ et $\gamma_1, \dots, \gamma_p \geq 0$.
Soient, $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\delta_{i,n} \in \mathbb{N}^*$ et $\ell_{i,n} \in \delta_{i,n}\mathbb{Z}$ tels que :

- $\delta_{i,n} \big| \delta_{i+1,n}$, $\forall n$, $1 \leq i \leq p-1$
- $\frac{\delta_{j,n}}{\delta_{i,n}} \Big| \frac{\delta_{j,n+1}}{\delta_{i,n+1}}$, $\forall n$, $0 \leq i < j \leq p$ et $\delta_{0,n} = 1$
- $\delta_{i,n} = Q_n^{\gamma_i + o(1)}$, $1 \leq i \leq p$
- $|\ell_{p,n}\xi_i - \ell_{i,n}| = Q_n^{-\tau_i + o(1)}$, $1 \leq i \leq p-1$
- $\max_{1\leq i\leq p} |\ell_{i,n}| \leq Q_n^{1+o(1)}$

Soient $\varepsilon > 0$, $Q \underset{\varepsilon}{\gg} 0$, $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{Q}^p \setminus \{\mathbf{0}\}$ tel que $\delta_{i,\Phi(Q)} a_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq p$ et $|a_i| \leq Q^{\tau_i - \varepsilon}$, $1 \leq i \leq p-1$. Alors

$$|a_1\xi_1 + \cdots + a_{p-1}\xi_{p-1} + a_p| > Q^{-1-\varepsilon}$$

et en particulier, $1, \xi_1, \dots, \xi_{p-1}$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants.

$\xi_1, \ldots, \xi_{p-1} \in \mathbb{R}$, $\tau_1, \ldots, \tau_{p-1} > -1$, 2 à 2 distincts, $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que $Q_{n+1} = Q_n^{1+o(1)}$ et $\gamma_1, \ldots, \gamma_p \geq 0$.
Soient, $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\delta_{i,n} \in \mathbb{N}^*$ et $\ell_{i,n} \in \delta_{i,n}\mathbb{Z}$ tels que :

- $\delta_{i,n} \big| \delta_{i+1,n}$, $\forall n$, $1 \leq i \leq p-1$
- $\frac{\delta_{j,n}}{\delta_{i,n}} \Big| \frac{\delta_{j,n+1}}{\delta_{i,n+1}}$, $\forall n$, $0 \leq i < j \leq p$ et $\delta_{0,n} = 1$
- $\delta_{i,n} = Q_n^{\gamma_i + o(1)}$, $1 \leq i \leq p$
- $|\ell_{p,n}\xi_i - \ell_{i,n}| = Q_n^{-\tau_i + o(1)}$, $1 \leq i \leq p-1$
- $\max_{1 \leq i \leq p} |\ell_{i,n}| \leq Q_n^{1+o(1)}$

Soient $\varepsilon > 0$, $Q \underset{\varepsilon}{\gg} 0$, $(a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{Q}^p \setminus \{\mathbf{0}\}$ tel que $\delta_{i,\Phi(Q)} a_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq p$ et $|a_i| \leq Q^{\tau_i - \varepsilon}$, $1 \leq i \leq p-1$. Alors

$$|a_1\xi_1 + \cdots + a_{p-1}\xi_{p-1} + a_p| > Q^{-1-\varepsilon}$$

$\xi_1, \ldots, \xi_{p-1} \in \mathbb{R}$, $\tau_1, \ldots, \tau_{p-1} > -1$, 2 à 2 distincts, $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que $Q_{n+1} = Q_n^{1+o(1)}$ et $\gamma_1, \ldots, \gamma_p \geq 0$.
Soient, $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\delta_{i,n} \in \mathbb{N}^*$ et $\ell_{i,n} \in \delta_{i,n}\mathbb{Z}$ tels que :

-
- $\delta_{i,n} | \delta_{i,n+1}$, $\forall n$, $1 \leq i \leq p$
- $\delta_{i,n} = Q_n^{\gamma_i + o(1)}$, $1 \leq i \leq p$
- $|\ell_{p,n}\xi_i - \ell_{i,n}| = Q_n^{-\tau_i + o(1)}$, $1 \leq i \leq p-1$
- $\max_{1\leq i\leq p} |\ell_{i,n}| \leq Q_n^{1+o(1)}$

Soient $\varepsilon > 0$, $Q \underset{\varepsilon}{\gg} 0$, $(a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{Q}^p \setminus \{\mathbf{0}\}$ tel que $\delta_{i,\Phi(Q)} a_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq p$ et $|a_i| \leq Q^{\tau_i - \varepsilon}$, $1 \leq i \leq p-1$. Alors

$$|a_1\xi_1 + \cdots + a_{p-1}\xi_{p-1} + a_p| > Q^{-1-\varepsilon}$$

Théorème 1 :

$\xi_1, \dots, \xi_{p-1} \in \mathbb{R}$, $\tau_1, \dots, \tau_{p-1} > -1$, 2 à 2 distincts, $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que $Q_{n+1} = Q_n^{1+o(1)}$.
Soient, $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\delta_{i,n} \in \mathbb{N}^*$ et $\ell_{i,n} \in \delta_{i,n}\mathbb{Z}$ tels que :

-
- $\delta_{i,n} | \delta_{i,n+1}$, $\forall n$, $1 \le i \le p$
-
- $|\ell_{p,n}\xi_i - \ell_{i,n}| = Q_n^{-\tau_i+o(1)}$, $1 \le i \le p-1$
- $|\ell_{p,n}| = Q_n^{1+o(1)}$

Soient $\varepsilon > 0$, $Q \underset{\varepsilon}{\gg} 0$, $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{Q}^p \setminus \{\mathbf{0}\}$ tel que $\delta_{i,\Phi(Q)} a_i \in \mathbb{Z}$, $1 \le i \le p$ et $|a_i| \le Q^{\tau_i - \varepsilon}$, $1 \le i \le p-1$. Alors

$$|a_1\xi_1 + \cdots + a_{p-1}\xi_{p-1} + a_p| > Q^{-1-\varepsilon}$$

Ingrédients des démonstrations des critères précédents

- Nesterenko (1985) : Intersections d'hyperplans + Théorème de Bézout métrique
- Fischler-Zudilin (2010) : Géométrie des nombres
- Fischler dual (2011) : Géométrie des nombres + lemme matriciel
- Théorème 1 : Pas de géométrie des nombres et autre application du lemme matriciel

Idées de la démonstration du Théorème 1

$$\varphi(n) = 1 + \Phi(Q_n^{1+\varepsilon_1})$$

$$Q_{\varphi(n)-1} \leq Q_n^{1+\varepsilon_1} < Q_{\varphi(n)} = Q_{\varphi(n)-1}^{1+o(1)}$$

Lemme (Fischler - 2011) :

Soit $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont les coefficients $m_{i,j}$ sont non nuls et tels que pour $1 \leq i < i' \leq p-1$ et $1 \leq j < j' \leq p-1$:

$$|m_{i',j}m_{i,j'}| \leq \frac{1}{(p+1)!}|m_{i,j}m_{i',j'}|$$

Alors M est inversible.

$$M_n = \begin{pmatrix} \ell_{1,n} - \ell_{p,n}\xi_1 & \dots & \ell_{1,\varphi_{p-1}(n)} - \ell_{p,\varphi_{p-1}(n)}\xi_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{p-1,n} - \ell_{p,\varphi_{p-1}(n)}\xi_{p-1} & \dots & \ell_{p-1,\varphi_{p-1}(n)} - \ell_{p,\varphi_{p-1}(n)}\xi_{p-1} \\ \ell_{p,n} & \dots & \ell_{p,\varphi_{p-1}(n)} \end{pmatrix} \in GL_p(\mathbb{R})$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{p-1} a_i \mathrm{Lign}_i(M_n) + (a_1\xi_1 + \cdots + a_{p-1}\xi_{p-1} + a_p)\mathrm{Lign}_p(M_n) \neq \mathbf{0}\,,$$

d'où $\exists k \in \{0, \ldots, p-1\}$,

$$\begin{aligned} A_k &= \sum_{i=1}^{p-1} a_i(\ell_{i,\varphi_k(n)} - \xi_i \ell_{p,\varphi_k(n)}) + (a_1\xi_1 + \cdots + a_{p-1}\xi_{p-1} + a_p)\ell_{p,\varphi_k(n)} \\ &= \sum_{i=1}^{p} a_i \ell_{i,\varphi_k(n)} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

et

$$|A_k| \leq \sum_{i=1}^{p-1} Q^{\tau_i(1-(1+\varepsilon_1)^k)-\varepsilon+o(1)} + Q^{(1+\varepsilon_1)^k-1-\varepsilon+o(1)}$$

Contradiction

Théorème 2 :

$\xi_1, \ldots, \xi_{p-1} \in \mathbb{R}$, $\tau_1, \ldots, \tau_{p-1} > -1$, $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que $Q_{n+1} = Q_n^{1+o(1)}$. Soient, $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\delta_{i,n} \in \mathbb{N}$ et $\ell_{i,n} \in \delta_{i,n}\mathbb{Z}$ tels que :

- $\delta_{i,n} \big| \delta_{i,n+1}$, $\forall n$, $1 \leq i \leq p$
- $|\ell_{i,n} - \xi_i \ell_{p,n}| \leq Q_n^{-\tau_i + o(1)}$, $1 \leq i \leq p-1$
- $|\ell_{p,n}| \leq Q_n^{1+o(1)}$
- $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_1$, $\exists \alpha_0(n), \ldots, \alpha_{p-1}(n) \in \mathbb{R}$ tels que $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$, $\ell_{i,n+p} = \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j(n) \ell_{i,n+j}$ et $\alpha_0(n) \neq 0$

On note $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} \ell_{1,n} & \cdots & \ell_{1,n+p-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{p,n} & \cdots & \ell_{p,n+p-1} \end{pmatrix}$$

et on suppose $\exists n_2 \geq n_1$ tel que $\det(\Delta_{n_2}) \neq 0$.
Soient $\varepsilon > 0$, $Q \underset{\varepsilon}{\gg} 0$, $(a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{Q}^p \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\delta_{i,\Phi(Q)} a_i \in \mathbb{Z}$ pour $1 \leq i \leq p$ et $|a_i| \leq Q^{\tau_i - \varepsilon}$ pour $1 \leq i \leq p-1$, alors

$$|a_1\xi_1 + \cdots + a_{p-1}\xi_{p-1} + a_p| > Q^{-1-\varepsilon}$$

Notations

$(e_1, \dots, e_p)$ base de $\mathbb{R}^p$, ε, $Q > 0$:

$$\mathcal{C}_{Q,\varepsilon} = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i, |\lambda_i| \leq Q^{\tau_i - \varepsilon} \text{ pour } 1 \leq i \leq p-1 \text{ et } |\lambda_p| \leq Q^{-1-\varepsilon} \right\}.$$

Avec $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -\xi_i)$ et $e_p = (\xi_1, \dots, \xi_{p-1}, 1)$

$$\mathcal{C}'_{Q,\varepsilon} = \left\{ \begin{array}{c} (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p, |a_i| \leq Q^{\tau_i - \varepsilon} \text{ pour } 1 \leq i \leq p-1 \\ \text{et } |a_1\xi_1 + \cdots + a_{p-1}\xi_{p-1} + a_p| \leq Q^{-1-\varepsilon} \end{array} \right\}.$$

Théorème 3 :

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $\mathbb{R}^p$ et $\|.\|$ une norme sur $(\mathbb{R}^p)^*$.
Soient $\tau_1, \dots, \tau_{p-1}$ des réels > -1 et 2 à 2 distincts. Soit $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers strictement croissante telle que $Q_{n+1} = Q_n^{1+o(1)}$. Soit $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réseaux de $(\mathbb{R}^p)^*$ telle que $\Lambda_{n+1} \subset \Lambda_n$. On considère une suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de formes linéaires telle que

- $\forall n \in \mathbb{N},\ L_n \in \Lambda_n$;
- $|L_n(e_i)| = Q_n^{-\tau_i+o(1)}$, pour $1 \le i \le p-1$;
- $\|L_n\| = Q_n^{1+o(1)}$.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $Q \underset{\varepsilon}{\gg} 0$, on a

$$\mathcal{C}_{Q,\varepsilon} \cap \Lambda_{\Phi(Q)}^{\perp} = \{\mathbf{0}\}\,.$$

Le Théorème 3 généralise le Théorème 1.

Lemme 4 :

$\tau_1, \ldots, \tau_{p-1} > -1$, $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que $Q_{n+1} = Q_n^{1+o(1)}$. On se donne :

- $\xi_1, \ldots, \xi_{p-1} \in \mathbb{R}$, $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, -\xi_i)$ pour $1 \leq i \leq p-1$ et $e_p = (\xi_1, \ldots, \xi_{p-1}, 1)$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$, $\delta_{i,n} \in \mathbb{N}^*$ avec $\delta_{i,n} | \delta_{i,n+1}$ et on pose $\Lambda_n = \delta_{1,n}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \delta_{p,n}\mathbb{Z}$

Alors

$$\text{Pour tout } \varepsilon > 0 \text{ et } Q \underset{\varepsilon}{\gg} 0,\ \mathcal{C}_{Q,\varepsilon} \cap \Lambda^{\perp}_{\Phi(Q)} = \{\mathbf{0}\} \iff \text{Pour tout } \varepsilon' > 0 \text{ et } Q' \underset{\varepsilon'}{\gg} 0,\ \mathcal{C}'_{Q',\varepsilon'} \cap \Lambda^{\perp}_{\Phi(Q')} = \{\mathbf{0}\}$$

Notations

Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$D_n = \mathrm{ppcm}(1, 2, \ldots, n)\,.$$

Théorème 5 :

Soit $n \geq 0$ suffisamment grand et $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{Q}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ tel que

- $D_n^2 D_{2n} a_0,\ D_n a_1,\ \frac{D_{2n}}{D_n} a_2 \in \mathbb{Z}$
- $|a_i| \leq e^{-\tau_0 n}$, $0 \leq i \leq 2$, $\tau_0 = 0.899\ldots$

alors

$$|a_0 + a_1\zeta(2) + a_2\zeta(3)| > e^{-s_0 n}$$

avec $s_0 = 6.770\ldots$

- Non trivial car $\tau_0 < 1$
- Contient l'irrationalité de $\zeta(2)$ (resp. $\zeta(3)$) en prenant

$$\begin{array}{llll} & a_0 = -p/D_n, & a_1 = q/D_n, & a_2 = 0 \\ \text{resp. :} & a_0 = -pD_n/D_{2n}, & a_1 = 0, & a_2 = qD_n/D_{2n} \end{array}$$

- Ne contient *pas* l'indépendance linéaire de $1, \zeta(2), \zeta(3)$ car $\tau_0 > 0$

Idées de la démonstration

$R_n(t)$ fonction rationnelle de degré -2 hypergéométrique, *i.e.* $\frac{R_n(t+1)}{R_n(t)}, \frac{R_{n+1}(t)}{R_n(t)} \in \mathbb{Q}(n,t)$

$$R_n(t) = (\text{constante}) \times \frac{\prod_{k=1}^{m_1}(t+c_k)!}{\prod_{k=1}^{m_2}(t+d_k)!}, \ c_k, d_k \in \mathbb{N}$$

$$\text{alors} \quad R_n(t) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i}{t+a_i} + \sum_{j=1}^{q} \frac{\beta_j t + \gamma_j}{(t+b_j)^2}$$

$$\Longrightarrow \ r_n = \sum_{t=1}^{\infty} R_n(t) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t+a_i} + \sum_{j=1}^{q} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\beta_j t + \gamma_j}{(t+b_j)^2}$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \right)}_{=0} \sum_{t=\max(a_i,b_j)}^{\infty} \frac{1}{t} + \sum_{j=1}^{q} (\gamma_j + b_j\beta_j)\zeta(2) + \underbrace{\text{cst}}_{\in \mathbb{Q}}$$

On a donc $r_n = q_n \zeta(2) - p_n$

$$\deg(R'_n) = -3 \rightsquigarrow \hat{r}_n = \hat{q}_n \zeta(3) - \hat{p}_n$$

Hypergéométrie $\rightsquigarrow$ formules explicites pour q_n et $\hat{q}_n$

Algorithme de télescopage créatif de Zeilberger appliqué à R_n, R'_n, q_n, $\hat{q}_n$

$\rightsquigarrow$ même relation de récurrence

$\rightsquigarrow q_n = \hat{q}_n$

$$P_3(n) y_{n+3} + P_2(n) y_{n+2} + P_1(n) y_{n+1} + P_0(n) y_n = 0$$

$\mathbf{P_0(n)} := -72335025(10n+3)(9n+10)(9n+1)(7n+9)(7n+2)(6n+7)(6n+1)(5n$
$+3)(9n+11)(9n+2)(7n+11)(7n+4)(10n+9)(3n+4)(5n+1)(7n+13)(7n+6$
$)(9n+13)(9n+4)(2n+1)(9n+14)(9n+5)(7n+8)(7n+1)(5n+4)(3n+5)($
$10n+1)(7n+10)(7n+3)(9n+16)(9n+7)(5n+2)(6n+11)(6n+5)(7n+12)(7$
$n+5)(9n+17)(9n+8)(10n+7)(n+2)(324955319865452946665657893918666901598$
$5768869051462906702643722317060907008000000000n + 10345900114191974344350448497 8$
$387301134664848011480035932484468083557601598278146080219744n^{9} + 5512766835244$
$921122746198267914365254544325111121777219173934939184923267159902126 08n^{37} +$
$1103078008988633633078898043740610827472557022770955075622697223881826 10254128$
$742400n^{38} + 20135209287521613801775752609150981760828141730554094220276296 3188$
$3469652850481561 6n^{39} + 477459133266915837324499267402520293853018467977601 7714$
$08901926732476512814062740634112n^{32} + 25214007779959067624106578928879516394 20$
$16636270366367333416299188271479091799588864 0n^{36} +$
$47224289158494568827516641241361499052893848658239954353591560035120237 7728$
$n^{47} + 501317451412529403494869513735625457282865832126965493618004397974711 6516$
$90086400n^{41} + 33402108214468386473104009848629995854193356941420925296902470 25$
$365561595190575104n^{40} + 43509376254636757848736102948563629275062351825952346 7$
$0241620306331603668552000659163627 60n^{11} + 2597972990363279869586328785175678 13$
$1445411040561016838092836325931323941368932860676888392n^{17} + 66906076423848782$
$94090190177819407662017185690235665809617478426463550630544710252152540 45$
$n^{23} + 1058297102693156639245983354853655410269050682873191957081377629207659 691$
$4992508583936n^{35} +$
$67505318341223893836664358350471861679223183392911218409030648104315833548 80$
$n^{46} +$
$825330750673878414417567188459745099671326462149680665958619053516325136629 76$

$n^{45} + 41748063594011714490259075761048180091852018147710947639328321135306442488692709141845760 n^{8} + 67710702233862241923602821682439211436993845928405134852537343355868716059328512 n^{42} + 1183489465577871447383346543789953163204635523830778541137822116290801801514274426486410000 n^{26} + 14472147616618811851343026553841568333480571259171695965904793702604706127882535544356653 70$

$n^{21} + 2438151284738975037020829827211995144781459961259699691595720288797674839872129456175921215 n^{16} + 25400058957573850810376248831917751299398127076861154908758530576567188955477769182470650 20 n^{18} + 1462589272170259593401493059820635254355655714293105512364314640876583087769128098671680 0$

$n^{7} + 876327497143490755508236180336490954771395411525080379232864645180092447719424 n^{44} + 2274509102932180753924864287295291736281667671112144908196315183317045432532091655562615 64 n^{25} + 14537093074433635581261907516450217128358760466591241105811004748950724410759110225024 0 n^{33} + 228387238077138249962260492311668281126224220566701623283657106643567305710072320594989486 9$

$n^{19} + 16398852146054374999916671054022207902283622704194806803245324512427706796498683843332876 26 n^{14} + 20937321307652585392588052064420769595594083559547606392284756709390808064652396478089921 79 n^{15} + 40857391619770273193241138494997770988765799570542376700172897425426994610601898737664 n^{34}$
$+ 438115483713750386157156496328375804618006787143496227682620699812451520811904799264 0000 n^{6} + 571002276396470589703735987196835753917570294327924964973092538685404800087581804456697 47 n^{27} + 1167038285986806796220265611634734446858882034445860314636898588586551122709363975453388 090$

$n^{13} + 4052429795323242172442835645614338554563178335868878883642976639982334416172261260897786 41 n^{24} + 81776870436785354382807213409893456063078191383401005059882687211471682247065 60 n^{43} + 14495393321601865881675639015490931290662323726 5$

$9743611962169612888749277139580590605760n^{31} + 1022968958937306050924272569 4253$
$5288079994026188915024748958270002769983982416617129222 1238$
$n^{22} + 10594988193070921292725218689194380723821964683243710302739837977839725 81$
$5145429173266216n^{29} + 3602439062958505271982879708855238039805155323482506 3488$
$3593432795534157642332160000 00n^{3} + 1099697173975752212989171517690189696697042$
$083533065654049643319626426425709839806720000$
$n^{5} + 2249708761018529952233947350388879780341590293132577205779200956507748 8437$
$9417164800000n^{4}+$
$276920664520515717567074028958197611850278333802333489694229776934161612 80$
$n^{48} + 189234199041825067248402812283158162646771890795419982417620761194753 7371$
$018671824441883081n^{20} + 225269512143635032185699878988499171355040734322277156$
$73191079633469538470038841585002169 6$
$n^{10} + 255453325658468778829186368870473033792106304581087672888200045248250 1773$
$1329596703046855n^{28} + 407220276959113569587293731000080671079133968489168031 45$
$0015418642416669098831124725996 4$
$n^{30} + 751246502081944564740971608258985782304924229588259457516158194087551 0638$
$257333327240458 88n^{12} + 423472771113353098927737681484345721329573646096042397 5$
$515545744390398106378240000000$
$n^{2} + 1323930150262649383776463907505611778810094325168754874571461071627878400$
$n^{49} + 13625673278194579354463300071379030074290989070728440924953850675 20000$
$n^{51} + 4956212051862245865829466146873765334827858297941894627333368709 1200000$
$n^{50} + 2151899014133739623222429944121494594868726319827372275138560 00000$
$n^{53} + 2446284514165856560873527406726799307047101739342003428676075 5200000$
$n^{52} + 1221263457793748406698977118744898280679244020849615456400312205053935616$
$0000000000)(3n+2)^{2}(3n+1)^{2}(n+1)^{3}$

$\mathbf{P_1(n)} := -362880(9n+17)(8n+3)(7n+9)(6n+11)(9n+16)(4n+3)(7n+11)(3n+5)(8n+1)(7n+13)(9n+14)(9n+13)$
$(7n+8)(8n+7)(3n+4)(7n+10)(4n+1)(9n+11)(6n+7)(7n+12)(8n+5)(9n+10)(n+2)(1306698181730639698635465 7$
$0019295805598074672268799248600641672189056452266590722917942537224192000000000n + 180528127493295800315802856814 48$
$710775324283056426678441659771845636918182197439836198678839301329304764524687403413372499 6n^{38} + 1280084998277157449217$
$41952794832219618962850175425682854936344888860038123559386840309108734116578478647113180869558333254n^{39} + 4226881$
$0993907422207447839423852620120189333438365901164082391021967371365836826308278600028353392107816747531893218849916 4$
$n^{32} + 302294937650389522465047396206980177802771018158988485745532762615197883221540784800358669859250534157440920111$
$725225638793n^{36} + 1037698737654260653327930189553291075531440378584437167861294112434521241041971422995847787417107441$
$0914035178300747843 84n^{47} + 2404186336341537473973857746760878261157078136215747176120776470561705305286694793399391 8$
$8283102047628665891226528129096974n^{37} + 1871449345222615555772878948386402576600056327411577211075090753005730396 1$
$476948523305698223642293936819386021427200n^{9} + 5421690940168190149766241083284962482640458753009229022737618462587 2$
$268240912025276730880291279439940476227837545817873206n^{41} + 857228790523908989255946530845532073858487579832477578079 25$
$843579444998864635483514768764655123322662903210139487900631882n^{40} + 62101133519338642287494930634573168264790170680$
$211380376796339215464635963089802969491149120575108486634162342880768n^{11} + 2543049583753964110051586524541017165752392$
$036178223698994219266922314382434325507234255571269907230151616542387404995167 8n^{23} + 35877676151766232002777455776$
$54068307141889725892364234982208291731746370101159676616369048115923168304663368914217069688 14n^{35} + 2319485580161059581 9$
$151043936721370497380311339504152898002411967884696263189873142719872570697285964379824771209248103 32n^{46} + 181284$
$3583644358339064206861305161645337193000183794529584599447291921059504567428815837205299708557019784975049125373 68$
$n^{17} + 489007151809453498607347294864154610897007465978133933257202034841414719760144836280739684748893716042823134 09$
$25295013388n^{45} + 2679715369356303258102229152068885257268752280135247859000724766532141863617064547714528792946297550 17$
$515069440000n^{8} + 32384556036228717183145357508530188248459358070866643675887277259479512258852437865859669122017680 5$
$436875387368188885919 24n^{42} + 115266851224113111404156590859119320234838897025448992159183028275180616 4$
$142018569406046566376482807008109161452866309350 04n^{26} + 6589478493604166198206811941909530598247049724354912897906 59$
$456405899818390943364380438792433150768988288222098759047830 2n^{21} + 60413006887443191418678962679693187672225583817324 2$
$576899122165320014809037101763285818175620055121735168324035783949 76n^{16} + 500603362156685493890228637757 7$
$65347404890547689423616868501638775154788301571852851895256445411519490842300230564201372n^{18} + 33212634534930178363202 93$
$247453919100230352082145396857845583572545178303487183759428768153147693362176485376000 0n^{7} + 97279851307210885837699 93$
$1355546811381649640946871490475929480404014096431594941897518337469971734172787712834115794839 71$
$n^{44} + 744416701320150473427435128847812647264445849491492090744011769274759089749516047271148354073396171524737424322$
$17817137886n^{25} + 4244325329205071880370412060721387635491239077694529903970245852695207281737899926544207111479354548 1$
$6409535424529345574132n^{33} + 127601422203343503363331528965618562633233649820403546691443072092112023609131429071436 0$
$709618954455594768393845452908398n^{19} + 5154566193740088486728788925837424718866681044254291867042913087622395476$
$10423316979839820395168284036748847477085529 6n^{14} + 184632294674935646628174623633583098266821664708814055221225200 6$
$7568427667621695725888009898549765670301403353943944768n^{15} + 401798123160563199833854136159100251009263737879297065441 4$

$1418769217327330849009403404977365597340896419070748447342021454 8n^{34} + 35066825472579224900275356 07$

$2711044798077837455710119850885254725976480926743675511032284919044999786217472000 00n^{6} + 16728595175572219163926431356866 66$

$1532599754715500702133830612841327275454713947092266132958883166640936531771397799187380 8n^{27} + 130869979676089218$

$1183113755695123471803076938444571578250921475644338056905719184111744368021956162198639551522884864$

$n^{13} + 4500271014269631221689439265259845563810336546260558117839068561998930580299424267982811498937696660990385351 8$

$609305719962n^{24} + 1826669928970418903829654918510369392655207323787111028825905450421106068$

$156930968814628571382948685719679940283281167704 4n^{43} + 396643678657699700622901140796$

$90964441198619557417929563282362904107411299474390571779291984974876002340710011820285110716 4$

$n^{31} + 1341156031630045368495188679334156282173387760452333247612694703016864583340836227796377723833755444961047001 9$

$649005482108n^{22} + 2914192458380105229427018067061143897322024442292829528722419173473045281$

$2964848223539618255079310351200529945422235421156 0n^{29} + 122660324765816163996929422879 3$

$8804972070797609105575504554353136840201773274851305143157929785655296000000 00n^{3} + 30889645955377425252685645086690977 17$

$18494406823010962708183361246835145443773144584472366483404589735936000000 0n^{5} + 2206493410227538134438522063001566 8$

$90464649199367402516017754564258699630580948203363400335217036820480000000 0$

$n^{4} + 4376586377507202913108645427973761089227366184259568333604737631050363844090911220232513286628156552124536284 60$

$603627520n^{48} + 3010397920422075496289959717114556244320119403583764854514835598744323303$

$564699667174070877314476747562237044780231298319n^{20} + 114561779122628936349905041397 5$

$888948166004613896620240505993524914798452322529036594243105840102576337958735572480 0$

$n^{10} + 2278143968487495610031152361924418832788895487487044038290544448593851109392601973805674824685221279164377227 8$

$5474204798725n^{28} + 35048718673988006165435271450612525626299481442158824422295062907515374 02$

$4606864340315799308106287959233490351771304036394 0n^{30} + 300615369243224159543641292093 4$

$181290487154574624874620460239980238987946626581394686528157896116845441032303815073 28$

$n^{12} + 4973211432317099874231658132252528148573246515541771949637897428906375824932571961891527438617804800000000 0$

$n^{2} + 1739105771377224408755101139678298936608649516537632334556055706816328078215581343727587456483389910436 03$

$580614692163840n^{49} + 2290007307944346267568088421508808906567174831759308802032283214342558262$

$9496017185585528934083224056112655192327405568n^{51} + 650641787604646764469255523859863710318589411686807820633 07$

$2094455817812138208017994157091161315212288938833152289177 60n^{50} + 2353019763575797411067458459249039383$

$34847425746615265084384388041996004679090353031482746674584685816088372990862950 4n^{53} + 757556001633544851791460667 5$

$01162548171266792970986056569124714406881237546056822583842546526414123196011895978577100 8n^{52} + 5207063137268689883$

$3281133993648364259580084784230364265799025836172953366881946266115774516155596211237709204684 8$

$n^{59} + 5389457244634415407274329230137183164440587605370072068171595949712459312$

$388269670400000000n^{77} + 693516789542864719092569926519673773228865430039669 4$

$1855064285986466494017282473197568000000000n^{76} + 1870006176680082467201491716911264073965378897265496051537634461048238891$
$7581043173897700354022594225480433775987 9168n^{55} + 1765691505634448725685469462498734329705163450759855605046847539294234923$
$3487695898848212818948901019140585684992n^{61} + 2883792427866552221484372058804758367767423318893107141354550140893115501$
$0244068812722001899549315744822649159 68n^{62} + 857123403060920867412030109833993294428496880057992177781698659238518981 2$
$5502774567054345688024717939703808n^{67} + 7789979426221734218147171616942456036363975659258263406336808861071509758$
$3883318441978856679428953263308 80n^{68} + 6255926447004284413350936036406185662714772217267004369177113138198930910$
$0289639743548528513639084195 8400n^{69} + 8415146186332881774909227690212074317370224234587058246349179301192544090$
$8940173454124321044527035644798 5664n^{66} + 2642485992116444687440667814757165071214212908482836878633078029100592364$
$18620036942137659976843264 0000n^{71} + 9969426221508174915550645495989368102365043438661316069151071844660621365$
$769546445734587343906763505152570 0583424n^{60} + 4385579750043684274094994527258137605948625852896658991219101021766321839$
$10020779659299575371818598 40000n^{70} + 7431494299249608791596252356974154502363304326322133806782452682434274768$
$974193629448332346706982046820990976n^{65} + 4771186124496715136317057708377730974711946338962086956838976412519765381$
$7977360499705960702460887154887362248441856n^{56} + 6854251227029881716454556213054001742336703917089597594501580468525152464$
$1685850083759923540048894110318783308077 4656n^{54} + 4327689230602874710581823996622482389289752410039388960832520724865157527$
$689447125396529983384439691484101345 28n^{63} + 1136526009983387027530240507460229499624030137428689923648119965202114432$
$342574803650144480989302912912338589633 7408n^{57} + 2522773687140510905991441688463818576661293275119042822164020401460202861$
$550844140688545672450515272681565435461632n^{58} + 5942792629409890195893483428014606092624464378133805777417081494598640525$
$11919130549230767751605503506954321 92n^{64} + 5572629066267512240262104588912097436075306648608173388192174165635643352$
$41187545181702009651200 0000n^{73} + 1340912924045553198269419616935924447289230602456123771359895903420890043$
$6445558512111865760317440 0000n^{72} + 4389161669014623015161794017542021665584254578166995393029751360456909214$
$3690531815292928000000 00n^{75} + 1821225965782488161356809819634942792990026038747612029064396060942329429$
$118427631108227072000000 00n^{74} + 1667947604412632685349135469413764195795134895432000522600340145042210987$
$934755605281924710400000000000000)$

$\mathbf{P_2(n)} := -94371840(8n+15)(8n+7)(4n+7)(4n+3)(8n+13)(8n+5)(2n+3)(8n+11)(8n+3)(4n+5)(4n+1)(8n+9)(8n+1)$
$(1625495105771746751865290795156686507843572100648022597930466478776706183046976227411550934217670372949622784$$0$
$000000000000n + 465557654521296409009$
$716727458852091559142505556020980902405206430068565332480974084024791145855286522563099224562604653024947646200726972727$
$n^{38} + 41579068392470584114397521217591673507029321742519001123174472045760331387113143072345571509432195969315107 14$
$1550795591802196218469927678043 7n^{39} + 3076845566590774291276060506670382341672463310931024384512566704051309077489844 84$
$774093421424884435634534241927725724702340214448298565318450n^{32} + 500251697869987458454560117200093971277274227 2287$
$688388838498322031561399641453845217303164635230435570899178618885694703858379800184768584 50n^{36} + 273450597939053248712$
$681998680274325203897452112387741317421177395645624075683875348267891988730625963857868237606959424529433868958104 2$
$7232n^{47} + 495222835691713111732278107219038581103669244863213586118703623163869498020010502488403381810245577316098840 1$
$925838966242600072356527413649 61n^{37} + 4722196960165710885622398008499720951685232053486768945472329365557531579708 61$
$01664825615669244848481374525743109143766942077440000n^9 + 284718565787818311029161294569551712886316696069348087280019$
$08594035764290815447349546709135510483119377635423752268263136476576512102264767 7n^{41} + 352897453153419149916813152 80$
$6173412322699325983566311155624665813335263292911150248558487546884996706539672623385327004175857850785744884377$
$n^{40} + 193787589254909175000357085894020583364298412640351717042450200346706812733652675376428347762627368493220928361$
$552770268052722637824 0n^{11} + 385907332775154329732826911787945664621670012173682473581794282850707347272959430117446587$
$718059141489240029548274524142581185517073022844 9n^{23} + 4796724739450748486892871811172628483786699482449809451729525 0$
$1209197370884147402305025527414959363317633074488413740388604811205580816756606n^{35} + 457974666347886757100447704841 16$
$11759931203134520299382022001515691651327082764753986088704702593769019760212273841648133359343099808076917 2n^{46} +$
$11662853227572715558734767149328847273908172505716588574711876391640864011595185965359434973861562339670819201414243851 1$
$246297351041812 96n^{17} + 7295643454369107039852215279396523788941027303820713274609917874550731811723443666175554437109$
$494762530205001011590087539580334980348417412 2n^{45} + 6112737231626408661895282574731099860330630316857687486620363322 7$
$6247031804119616121239161746921748041630237880303188497076224000 0n^8 + 218411313911586363298977015547146847$
$124199651687019726920215667498949174968616134339972447911245450732216068037800679561816914407914890772217$
$n^{42} + 283540175256792099531694233017962602523844131904062281669406744328189826751267348948257330138128510551096400629627$
$70153719024213828082058189n^{26} + 73959158821587929077442063271282336639279148171273489215426470113652627 58$
$9626382929114575671937685260499593518063663114505987006563820704 9n^{21} + 3413857899760581648827965678987697 1$
$765303640128547042196532959849958383488652911688500535573146494177008393822580382706535446427633319 68$
$n^{16} + 368032289679146408535017848237982593523239940130485622985412890789729270767889202919580723758150871303967453738273 43$
$296664083883096350784n^{18} + 68733862954657240535321169305409191438448720422572384089000024440437225 95$
$948882247295437123190875196136949015355020746319872000 00n^7 + 11054900574102756175233694030141051465 53$
$49899703619214397553423728342361621504191775090632237477401457964592794513443635976625961383163585327$
$n^{44} + 1552322244166513020874051794136651607878544284661459197055332886562712303758546890289360386446845735013517092126 2$
$99339160614076172933489348 9n^{25} + 37641135694473923168385454607830672510255287611037942787144894088893250 69$

$5661413298301561649301126257663752519199229631508803309018307267105 8n^{33} + 10760493375571336455306543120 78$
$9075081980068977948059424443662008849359361580938398497501343318554203240469810551316743012114727370871458 4$
$n^{19} + 227215595838237757564428993350618959904585713677931996570961244108541876678275168289746563878342367701558873235 0$
$3140655743311859248614 4n^{14} + 91980280098652916744875921751964956089379717896265254906872014227208107 63$
$8926568796739948693122199994474311530475501890324686996498201 6n^{15} + 43636631498933101365035784979 10$
$3312080280055486893962715632918008372032297432536179789275049738653664914826508470483231164526291129696580660 2$
$n^{34} + 660732006277587836011693928526882088080240705922326496200003267212323232656324045694803058615361365768376699313$
$4242081996800000 0n^{6} + 48750610067463510854970405238274057772881932737061277721625802693326418586$
$825882465068061683525833261339681396094072791898211791903112120459n^{27} + 5122938581674650219029611667572567$
$926081562112290077555641665388335573486299024097082716847208049474848383917422320735325999846241459 2$
$n^{13} + 798893086961654675855218845526582679355155145555988430950515285382166484609986717093246440227333728732892505156 39$
$18594669168127234737740149n^{24} + 159332058893825131992110824965122101913099440363460672693218697858904027 0$
$241064189304401900187225187723681788676821299475724972904011989125 27n^{43} + 238164125324012000929044020270108 6$
$796810899920481786332742308598283192442514316584353781984082601448713570771981202052996849072712894367331 14$
$n^{31} + 17468180502314794085090995024205301269688807331642016187057738633268893549491387008114225144363385189839024798763 92$
$6977954247729362190001 79n^{22} + 12078748234815970155129717841677176873235224317688974727292281168951591 72$
$686824004062716661312327209545287549248163418466041887258618299839 64n^{29} + 178205702828649790612277358232047 85$
$9553901951499331369157908887924552275985989101911239184199844840666535983612887040000000 00$
$n^{3} + 531800464048816466799518452739607665790555221225947267040411898548204747134428009062005416322487505992913273156422000$
$640000000 0n^{5} + 34833559348367951813045620626291598910228215896715739140257618036114495161286166630727455677223762$
$1056495975206440140800000000n^{4} + 155290396996761723609385548781710737294071255114170953882742487890602392 15$
$43891222485452114500268876370132590071640098443265836771522349499 2n^{48} + 2923092588546248044425190293095842$
$187230631065340808497846886192367967496995226587654427195198587899471298396810931379229386449663704481 24$
$n^{20} + 3208962443207176910087415934882619656942223154996678699807887400472485151549541352934943633511156449638435271726 4$
$810191725760655360 0n^{10} + 7899843036273580732508489134438857883670613276443802556715129049046781665$
$873485346871078504937912738806963356053388871420153756359681677297 9n^{28} + 174437003003310511826455913086581 2$
$905235936075935590026445462262623033513864132065239766544045337926114863308626348335296459068195424658183 54$
$n^{30} + 104878561834171277485354407369465932817650561725482846272814096760352169814902679529034675980160105744630934 77$
$3852803316019035843655 68n^{12} + 667349613899882586203767520420911108831848051674911459046190850724439986 9$
$41994865583379407788196842349658922024960000000000 0n^{2} + 838658707681103733067347093076621672 7$
$307702064010716215258858407335599632605506768967754334638938982608034494911159800568844108870457744672$
$n^{49} + 21021532406925563806762093165907790385307832754873551802995901631138638817345919759665239961373502267213547 95$
$771427935781309386974676042752$

$n^{51} + 4306504541902439275183334262663292850984406988238942510701549445088974013645263539229376464141564788693748878452$
$2580556346870505275524640192n^{50} + 4297589324527490145469495142677985009641091842776203373332187695311333062$
$1738811784624985369391348374784282331035025555696154708575384780 8n^{53} + 9751702471371334232516227914599$
$97911606449828276273182289597286121471091013737865707360983718941118808478576894615537512637727970614250496$
$n^{52} + 1043746514719885325009653305064$
$72864124744927146559013768981778207012873035787039558275614606647931609757607856097421271202030936286822 4$
$n^{59} + 2115629850747887797244162940104172177766490537061218152535277962732204920755588004233456913595390062551198124 10$
$48632393728n^{77} + 2410843138062482712521521192365066169666579114625529112417000461360909926$
$672235250236186995720727416930256582655501255311 36n^{76} + 71445348910793399305402178523 08$
$45168244141681360574130299951001208660336078463567414714708380217292649591111441817474247015710416217702 40$
$n^{55} + 9066082832367061880026310205760982915347909333029354060259692998605237085125483876869317649071267106755548072 73$
$8972553295057620723302 4n^{61} + 24521533508421796707956959026354690054170598043986218394296405524661919 00$
$378022440283344687929357521329297321200423842854349077636710 4n^{62} + 14291729438698552149982885358 57$
$47013177662399524719920582670868411891057965173362255399792418269704007860864225772268776717119651 84$
$n^{67} + 2655941850959734408750677677897301106964746287372543921449615007112284196980690628470038444407293135772456201 63$
$611730574532044390 4n^{68} + 46058577097338494540317329444913916583379369017522932009545458330620909 27$
$652074622075932685543169218867166847149687094588882288 64n^{69} + 71925829217115001186447813635 83$
$061733775427279553168445899114415754541729881494226414816620214604296659869601824254391107187009126 4$
$n^{66} + 1113890721059609734819809662186449345807460893580923842077311088078946260856925114304167424208216592269566285 71$
$898011161397821 44n^{71} + 31643359929753953232479477955537988917438778311763946673457284067936489 77$
$6196215453584193406217116518863576083835872553582824681530982 4n^{60} + 74347136707940058178964411133 64$
$186210940662170603040219392926247082411909867784124903951745716550006656987014059268119546193510 4$
$n^{70} + 3392267579849476018829899569157710673097164382424062938425240449708333240768464775090423946455405355275151284 82$
$077818044014881931264n^{65} + 26924366044940982957047518675754002369918883647509245023978109397153098 28$
$5962925308670305682007174361540383827374375397288082250395549696n^{56} + 17985536541403707204446470783 81$
$1071173287667866087414106498306469910948007800582334190928392063471205215589731627456636376828694515951206 4$
$n^{54} + 6253983176210970958194645777746158169114992092256553221426613056990615900719029554774171390316946896099533998 07$
$734204006023794419302 4n^{63} + 96200158217830434154839709952562192931802127065101281582835360001079516 88$
$6450353320243002340048824801558662915435611045260015196071526 40n^{57} + 32566373671776065476819384297 78$
$178646262130164393731527393013074034838686405165824681777609328492102315485123050974327309735659562860544$
$n^{58} + 1502037080580069545315234049395421341370494422649795357397861775821411519002017445448086355021543626789748226 66$
$24413948678758455050 24n^{64} + 19727150263529955532636193601221555475475160714514011193256186888500751 62$
$566900867736012306949928630407836079556269717764177 92n^{73} + 15439834548688256991593789041 66$
$0917736961662591625773713618545502098872901279667739299642083505629642359360078847849419621007 36$

$n^{72} + 247818432615620184604858550189331717263400172520345524431440492017332924438871401539318091451696729652730279588$
$9513634725888n^{75} + 2313504279793261518423482165058220365226328467156707055923622400595854206$
$5920518940785075056218359288353000790299885636157440n^{74} + 1661227904008991775641423382111$
$3800227205096323607471285283909555859069766725041230022235229470213928798808169715544883 20$
$n^{78} + 7037438809321426829891747963406644538143572465034420242681815069257976232563483461582495325637922459783565471 96$
$0268800n^{80} + 3615164972717575691506470993845280376311319991081312289491320667810950580$
$915418299342449910301376433356800000 00$
$n^{85} + 115573459875330554525867050737662723917568603372383451984284236131914 6676$
$1745325079216445464383308093673320797739941 8880n^{79} + 1635914367949487553983743723363$
$3291645991852797135649243312947240119398843639293897163035986700451460255433359360000$
$n^{82} + 595000714172530058520845849141704344857359016752856139304751260185395536985452218832580745489558263813898240000000$
$n^{83} + 3692671019529873315870759985002359213707272801936104551620082892975328818685697353377431915839599804363620189470720 00$
$n^{81} + 3455779465484309019375195868533060600472304368406248797859319954550833441573768752144942042919731200000000 0$
$n^{87} + 1705918476531280382907590226105874285842403585807754196113183827425797129412965643036913093887147539378995200000 0$
$n^{84} + 5034388702992317610054498986292197926597869547478955386523093958389593739165449730178513292843443814400000000 0$
$n^{86} + 1930655686255778153067579252455139641982227652385242733048875403082924495970341952458520190974306882158 59$
$200000000000000)$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P_3(n)} := 34359738368(16n+39)(8n+15)(8n+7)(6n+17)(16n+37)(4n+7)(4n+3)(16n+35)(8n+13)(8n+5)(16n+33)(2n+3)\\
&(16n+47)(8n+11)(8n+3)(16n+45)(4n+5)(4n+1)(16n+43)(6n+13)(8n+9)(8n+1)(16n+41)\\
&(3140696507613063692347779887417563067082295124001893547119616000000n + 628244073218814585043383601148030088039587742\\
&604775351647231623311309939136266624n^{38} + 2258616986381419477680912795957463118044324159741116994800629987200252849946662\\
&4n^{39} + 424521386439324278264187546349201459744341015297286419495115406000853296407108864n^{32} + 3654788030207978181959\\
&162478911555798850905567054260624109976492920551631455125504n^{36} +\\
&104158335009628264378501518468600711612943345570350351928924191956276346888n^{47} + 1587395714756987143762730860270\\
&310683722641355755974260416621613436777439627837444n^{37} +\\
&151578115185529782486532122272723187710772373677422744452893154260954184617 6n^{9} + 2154656601954050109480341031359 5\\
&0394749146678468622103602036057105225801007104n^{41} + 7348978310386768910640913255252397681936744357856305189733070621059 8\\
&7962896384n^{40} + 3563204522783375678486424201524118974426711740324513666034283400614103698129 6\\
&n^{11} + 822120506862768476582934105491383138421229972431531411749655520724326922474349831n^{23} + 768769074045926451651 7\\
&1184444093563663834960298308218401870733296806834495832064n^{35} +\\
&7793903534084402614029322002834521963299010738683331929914860225912268390 4n^{46} + 2993963361264812339750020681322\\
&4515983242476108341007456292423224437574882363831n^{17} +\\
&49705970404463452515436161684638339423140093346061482062097252784976324198 4n^{45} +\\
&254853780625247749759623781046524996324375430358562264417799751573201414336n^{8} +\\
&566267786835612477871737537321101239869274597687209676691137960469282307440 64n^{42} + 1374063997264737220273120525 80\\
&82129915082670214656794325484705529342729202696948 41n^{26} + 3855274607475834434780394151841015720509767152858072713380904 44\\
&3731816034504280 21n^{21} + 125783309274444413521087925351675018469631648301336035056789541458429867952274 21n^{16} +\\
&648879622737099284005041374948413809758840228276812624808504044820030010908088 51n^{18} +\\
&3681247089321132406974286640125130327761866074988989367242415577886120294 4n^{7} +\\
&2743155598526424300526799181160107597759852984575652111033385811392105283584n^{44} + 1256722967972126438761465986 98\\
&0908579075591895212895847984898554745776159273788741n^{25} + 2615713503981494692102334647917515328621686286915671996724580 85\\
&973886754570042624n^{33} + 128378545650399710779961246368862897121728012244990574452843766155262940174995301n^{19} +\\
&1655131880943326834168767017301735269519016680730664353492814997858962275930751n^{14} + 47972388593537865207828758852430208007\\
&9206722135935428481718009758322960092706 1n^{15} + 148060868330983594096668007663813395368038227550613436957108697094510\\
&541005799424n^{34} + 449707326522593906920533511296471601680976937189147588254952302038344448 0n^{6} + 13849601479371409\\
&5119640076114283079837828004910090319622840211379505432483831534 3n^{27} + 514484211607471307303972238281289 79\\
&0923545113579746463256333570164142153659151n^{13} + 105917782949226784767085817278544246652106195061495332514\\
&8460582992710386967636591n^{24} + 1325627997396478682157833631281356125607201248044372956779036064869771535974 4\\
&n^{43} + 633718060328098124793391421844204611943145166168504732500680234880287398 7
\end{aligned}
$$

$$74855104n^{31} + 5871964170129991457021566823381976714282744407224690927347893317714835140680139 61n^{22} + 110279099623241$$
$$79293635241712767188313583114797749015331015619640985601005632706 24n^{29} + 2338066995667335311727728392394 3148$$
$$5891178270840382740423828968448 0000n^{3} + 4551366478630841031938593075704792209121112873045189521215434616296896 00$$
$$n^{5} + 371000963977635255053697975381241560634566779750945759913903527685120 00n^{4} + 1162798641392129417759960513 0430$$
$$7754761917095188284857558396343542611968 0n^{48} + 23237308562304509660366770738686663408505453585378732088372831181244189 38$$
$$42333341n^{20} + 784124562992056703865453182255526693521526854788639844149628991138810056 6256$$
$$n^{10} + 128707845081372469317916105842685380469066750874248297363368013549150747701711665 9n^{28} + 870947667521718061 8478$$
$$65765792567530405628986490844756179080704895120696143406844n^{30} + 143392845250053962552067779850147850386847467200024 758$$
$$3901136637024617140256 36n^{12} + 106780046345987518478252515699700599424289167305727949272646758400 000$$
$$n^{2} + 1054815725520522491197628411216704644851002767814460497457248714358784 00n^{49} + 3870310646008418438721466019 399$$
$$0932293751648948721420909791936512 0000n^{51} + 746788082715966350635394013080294554289962950555126072857421938688 0000$$
$$n^{50} + 21518990141337396232224299441214945948687263198273722751385600 0000n^{53} + 1305778036674974560565639536 342$$
$$40717176667678983349612285263872 00000n^{52} + 446065992878547731711200442730228570240666970009091930112 00000000)$$
$$(4n+11)^{3}(8n+17)^{3}(2n+5)^{3}(8n+23)^{3}(4n+9)^{3}(8n+21)^{3}(n+3)^{3}(8n+19)^{3}$$

$\forall i \in \{0, 1, 2, 3\}$,

$$P_i(n) \in \mathbb{Z}[n]$$

$$\deg(P_i(n)) = 100$$

$$\text{taille plus grand coeff}(P_i(n)) \approx 10^{113}$$

$$P_i(0) \neq 0$$

$$\text{signe coeff}(P_i) = \text{cst}_i \in \{-1, 1\}$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{Hypergéométrie}\\ +\\ \text{Symétrie en les}\\ \text{paramètres}\end{array}\right\} \rightsquigarrow \hat{\Phi}_n^{-1} q_n, \hat{\Phi}_n^{-1} D_{8n} D_{16n} p_n, 2\hat{\Phi}_n^{-1} D_{8n}^3 \hat{p}_n \in \mathbb{Z}$$

où $\hat{\Phi}_n$ produit explicite de nombres premiers et avec

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log|r_n|}{n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log|\hat{r}_n|}{n} = -\rho = -19,1009\dots$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log|q_n|}{n} = \kappa = 27,867\dots$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \hat{\Phi}_n}{n} = \varphi = 5,701\dots$$

$$\tau_0 = \frac{1}{8}(32 - \varphi - \rho) = 0,899\dots$$

$$s_0 = \frac{1}{8}(32 - \varphi + \kappa) = 6,770\dots$$

$$\begin{vmatrix} q_0 & q_1 & q_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 \\ \hat{p}_0 & \hat{p}_1 & \hat{p}_2 \end{vmatrix} = \frac{28866666573725618155283921483481952З}{1072688684225235517440000} \neq 0$$

$$\text{récurrence} \quad \Longrightarrow \quad \begin{vmatrix} q_n & q_{n+1} & q_{n+2} \\ p_n & p_{n+1} & p_{n+2} \\ \hat{p}_n & \hat{p_{n+1}} & \hat{p_{n+2}} \end{vmatrix} \neq 0$$

D'où, $\forall m$, $\exists \ell \in \{n, n+1, n+2\}$ avec $n = \lceil m/8 \rceil$,

$$a_0 q_\ell + a_1 p_\ell + a_2 \hat{p}_\ell \neq 0$$

où $\lceil m/8 \rceil$ est le plus petit entier $\geq m/8$.

On introduit

$$e_{m,\ell} = \frac{2D_{8\ell}}{D_m} \in \mathbb{N}$$

"Négligeable" : $e_{m,\ell} = e^{o(\ell)}$ puisque $m \leq 8n \leq 8\ell < m + 24$.
Permet d'avoir :

$$\frac{D_{2n}}{D_n} \Bigg| e_{m,\ell} \frac{D_{2n+2}}{D_{n+1}}$$

Donc

$$e_{m,\ell} \hat{\Phi}_\ell^{-1} D_{8\ell}^2 D_{16\ell} (a_0 q_\ell + a_1 p_\ell + a_2 \hat{p}_\ell) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

En supposant $|a_0 + a_1\zeta(2) + a_2\zeta(3)| \leq e^{-(s_0+\eta)n}$,
inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}|a_0 q_\ell + a_1 p_\ell + a_2 \hat{p}_\ell| = |q(a_0 + a_1\zeta(2) + a_2\zeta(3)) + \\ a_1(p_\ell - q\zeta(2)) + a_2(\hat{p}_\ell - q\zeta(3))| \\ \leq e^{-(32-\varphi+8\varepsilon)n+o(n)}.\end{aligned}$$

Et $|e_{m,\ell}\hat{\Phi}_\ell^{-1} D_{8\ell}^2 D_{16\ell}| \leq e^{(32-\varphi)n+o(n)}$

$$\Longrightarrow \; e_{m,\ell}\hat{\Phi}_\ell^{-1} D_{8\ell}^2 D_{16\ell}|a_0 q_\ell + a_1 p_\ell + a_2 \hat{p}_\ell| \leq e^{-8\varepsilon n+o(n)}$$

Contradiction

Merci de votre attention

et

Bon appétit !